

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

УДК 004.421:681.5(043)

на правах рукописи

МАЗАҚОВА ӘЙГЕРІМ ТАЛҒАТҚЫЗЫ

**Разработка алгоритмов и программ управления беспилотными
летательными аппаратами**

8D07116 – Интеллектуальные системы управления

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Научные консультанты:
д.т.н., доцент Джомартова Ш.А.
д.т.н., доцент Жмудь В.А.

Республика Казахстан
Алматы, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ	3
ОПРЕДЕЛЕНИЯ	4
СОКРАЩЕНИЯ	5
ВВЕДЕНИЕ	6
1 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ	14
1.1 Литературный обзор	14
1.2 Постановка задач	25
1.3 Выводы по первому разделу	28
2 УПРАВЛЯЕМОСТЬ БПЛА	29
2.1 Литературный обзор по проблеме управляемости	29
2.2 Критерий управляемости БПЛА	30
2.3 Численные расчеты	33
2.4 Выводы по второму разделу	35
3 УСТОЙЧИВОСТЬ БПЛА	36
3.1 Литературный обзор по проблеме устойчивости	36
3.2 Критерий устойчивости БПЛА	39
3.3 Численные расчеты	44
3.4 Выводы по третьему разделу	47
4 ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БПЛА	49
4.1 Литературный обзор по проблеме оптимального управления	49
4.2 Определение оптимального управления	52
4.3 Численные расчеты	55
4.4 Выводы по четвертому разделу	66
5 УПРАВЛЕНИЕ ГРУППОЙ БПЛА	67
5.1 Литературный обзор по проблеме управления группой БПЛА	67
5.2 Разработка алгоритма автоматического выбора целей группой БПЛА	68
5.3 Выводы по пятому разделу	72
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	74
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	75
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Сертификат научной стажировки	84
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Свидетельства о государственной регистрации прав на объект авторского права	85
ПРИЛОЖЕНИЕ В. О публикациях, входящих в БД Scopus	95

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертации использованы ссылки:

РДС РК 2.04-08-2009 – Технические требования по оснащенности системами безопасности и инженерно-технической укреплённости стратегических, особо важных государственных объектов и объектов жизнеобеспечения Республики Казахстан

ГОСТ Р 57258-2016 – Системы беспилотные авиационные. Термины и определения

ГОСТ Р 59517-2021 – Беспилотные авиационные системы. Классификация и категоризация

ГОСТ Р 59518-2021 – Беспилотные авиационные системы. Порядок разработки

ГОСТ Р 59519-2021 – Беспилотные авиационные системы. Компоненты беспилотных авиационных систем. Спецификация и общие технические требования

ГОСТ Р 59520-2021 – Беспилотные авиационные системы. Функциональные свойства станции внешнего пилота

ГОСТ Р 60.0.0.3-2016 – Роботы и робототехнические устройства. Системы координат и обозначение перемещений

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Автономность (autonomy) – способность выполнять задачи по назначению на основе текущего состояния и восприятия внешней среды без вмешательства человека.

Беспилотная авиационная система – комплекс, включающий одно или несколько беспилотных ВС, оборудованных системами навигации и связи, средствами обмена данными и полезной нагрузкой, а также наземные технические средства передачи-получения данных, используемые для управления полетом и обмена данными о параметрах полета, служебной информацией и информацией о полезной нагрузке такого или таких ВС, и канал связи со службой управления воздушным движением.

Беспилотное воздушное судно, беспилотный летательный аппарат – воздушное судно, управляемое в полете пилотом, находящимся вне борта такого ВС, или выполняющее автономный полет.

Система управления (control system) – совокупность управляющей логики и силовых функций, позволяющих контролировать и управлять механической конструкцией робота, а также осуществлять взаимосвязь с внешней средой (оборудованием и пользователями).

Адаптивное управление (adaptive control) – режим управления, при котором параметры системы управления настраиваются в зависимости от условий, выявляемых в процессе выполнения задания.

Контурное управление; СР-управление (continuous path control; CP control) – режим управления, при котором пользователь может устанавливать маршрут перемещения робота между заданными пространственными расположениями.

Копирующее управление (master-slave control) – режим управления, при котором движение первичного (задающего) устройства воспроизводится вторичными (ведомыми) устройствами.

Позиционное управление; РТР-управление (pose-to-pose control; РТР control) – режим управления, при котором пользователь может устанавливать перемещения робота только с помощью заданных пространственных расположений без определения маршрута перемещения между этими пространственными расположениями.

Сенсорное управление (sensory control) – режим управления, при котором движение или усилие робота регулируется выходными сигналами от экстероцептивных датчиков.

Траекторное управление (trajectory control) – контурное управление с запрограммированным значением скоростей перемещения.

Управление с самообучением (learning control) – режим управления, при котором опыт, накопленный на предыдущих циклах, автоматически используется для изменения параметров и/или алгоритмов управления.

СОКРАЩЕНИЯ

АС – автоматизированная система

БД – база данных

ЛПР – лицо принимающее решение

СУБД – система управления базами данных

БАС – беспилотная авиационная система

БВС – беспилотное воздушное судно

БЛА, БПЛА – беспилотный летательный аппарат

ВС – воздушное судно

ДПАС – дистанционно-пилотируемая авиационная система

ДПВС – дистанционно-пилотируемое воздушное судно

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность диссертационной работы. Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) стали важным инструментом в различных сферах благодаря своим уникальным возможностям. Применение БПЛА очень разнообразное и затрагивает многие сферы жизни человека. Актуальным является применение БПЛА в сельском хозяйстве. Использование при мониторинге состояния полей, оценки урожайности, а также для точного внесения удобрений и пестицидов позволяет повысить эффективность сельского хозяйства и снизить затраты. Дроны могут быстро и точно собирать данные для создания карт, 3D-моделей местности и проведения топографических съемок, что значительно ускоряет процесс и снижает затраты. БПЛА могут быть использованы для поиска пропавших людей, доставки медикаментов в труднодоступные районы и оценки ущерба после стихийных бедствий. Дроны используются для наблюдения за состоянием экосистем, отслеживания изменений в природной среде, а также для борьбы с браконьерством. БПЛА стали популярными в киноиндустрии и для создания высококачественных фотографий и видео с воздуха. Также БПЛА применяются для мониторинга строительных площадок, инспекции зданий и инфраструктуры (мостов, линий электропередач и т.д.), что позволяет выявлять проблемы на ранних стадиях. Многие компании исследуют возможность использования дронов для доставки товаров, что может существенно сократить время и затраты на транспортировку.

Такое всестороннее применение БПЛА обусловлено несколькими причинами. Во-первых, БПЛА обычно дешевле в эксплуатации по сравнению с традиционными пилотируемыми самолетами. Они также проще в обслуживании и могут обеспечивать продолжительные периоды полета. Кроме того, они способны работать в условиях ограниченной видимости и темноте, что делает их ценным ресурсом в экстренных ситуациях, когда участие пилота может быть опасным.

Таким образом, с учетом технологического прогресса и снижения стоимости БПЛА, их применение будет только расширяться, открывая новые возможности в различных отраслях.

Важным аспектом применения БПЛА является их управление. В настоящее время многие задачи выполняются с помощью дистанционного управления, что часто связано с ограничениями качества связи и погодными условиями. Поэтому в настоящее время активно разрабатываются методы, направленные на увеличение автономности этих аппаратов. Одним из основных направлений исследований является создание алгоритмов автоматического управления полетом, которые позволят беспилотным летательным аппаратам выполнять миссии без участия человека. Это требует разработки методов и алгоритмов для построения траекторий, учитывающих окружающую среду в реальном времени.

Сложность задачи управления БПЛА обусловлена множеством факторов, включая размерность математических моделей, а также необходимость непрерывного получения данных о параметрах движения для принятия оптимальных решений.

Квадрокоптеры, которые являются типом беспилотных летательных аппаратов, имеют значительные перспективы для гражданского применения. Тем не менее, способность работать независимо ограничена трудностями в избегании препятствий и навигации, когда сигналы спутниковой навигации недоступны.

Таким образом, создание математических моделей, алгоритмов управления и анализ управляемости беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) представляет собой ключевые и актуальные направления исследований. Целью данной диссертационной работы является анализ математических моделей динамики БПЛА, а также разработка алгоритмов для исследования их управляемости и поиска оптимальных решений управления. Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

- 1) Исследование математической модели динамики БПЛА.
- 2) Разработка критерия управляемости БПЛА.
- 3) Разработка алгоритмов нахождения оптимального управления БПЛА.
- 4) Создание программного обеспечения для определения управляемости и вычисления оптимального управления.
- 5) Разработка алгоритма управления группой БПЛА.

Научная новизна работы проявляется в следующих аспектах:

- получении нового критерия управляемости для беспилотных летательных аппаратов на основе применения методов интервальной математики.
- автоматизации проверки устойчивости динамики БПЛА на основе применения компьютерной алгебры.
- разработке алгоритма выбора оптимальной траектории полета на основе применения метода штрафных функций.
- создании алгоритма распределения целей между группой БПЛА.

Методы исследования, примененные в работе, включают интервальную математику, численный анализ, теорию управляемости и оптимального управления, а также современные системы проектирования и разработки программного обеспечения.

Объектом данного исследования выступают БПЛА, в то время как предметом исследования являются математические модели и алгоритмы, предназначенные для оценки управляемости этих аппаратов и разработки оптимальных стратегий управления ими. В рамках исследования будет проведен анализ существующих подходов к моделированию поведения БПЛА, а также разработаны новые алгоритмы, способствующие повышению эффективности их управления в различных условиях эксплуатации.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения разработанных алгоритмов как для управления одиночными БПЛА, так и для координации действий группы таких аппаратов.

Научная значимость работы проявляется в создании новых критериев управляемости и устойчивости на основе интервальной математики, а также в разработке алгоритмов оптимального управления для БПЛА.

Научные принципы, выводы и рекомендации, выдвигаемые на защиту, подкреплены соответствующим применением математических инструментов, надлежащим экспериментальным проектированием и анализом, а также согласованием теоретических результатов исследований с экспериментальными данными. Достоверность проведенных исследований подтверждается установленными теоремами и численным анализом модельных задач.

Связь темы с планами научно-исследовательских программ. Тема диссертационной работы тесно связана с планами научно-исследовательских программ. Исследование проводилось в рамках календарного плана грантовых научных работ, ориентированных на приоритетные направления: 4. Информационные, телекоммуникационные и космические технологии по подприоритету: 4.1 Искусственный интеллект и информационные технологии: 4.1.1 Интеллектуальные системы управления и принятия решений (в том числе в режиме реального времени) по теме проекта: АР19678157 «Разработка программно-аппаратного комплекса мониторинга состояния уровня заполняемости водоема» КазНУ имени аль-Фараби.

Диссертация хорошо структурирована и состоит из введения, пяти разделов, заключения, библиографии и приложений.

Введение обосновывает актуальность выбранной темы. Четко определены цель, объект, предмет и задачи исследования. Представлены результаты исследования, подчеркивающие их научную оригинальность и практическое значение, а также информация о валидации основных результатов.

В первом разделе рассматривается глобальный ландшафт научных публикаций в этой области, дается четкий обзор ее развития и оценка ее значимости и потенциальных приложений. В нем освещаются как внутренние, так и международные достижения в разработке и использовании БПЛА, а также представлены вопросы, рассматриваемые в диссертации.

В разделе также исследуются текущие тенденции в развитии и практическом использовании технологий БПЛА, подчеркивая важность разработки новых алгоритмов управления для такого класса задач. Особое внимание уделяется интеграции БПЛА в существующие системы, а также вопросам безопасности и этики, связанным с их применением. Анализируются примеры успешных внедрений БПЛА в различных отраслях, таких как сельское хозяйство, логистика и охрана окружающей среды. В заключение раздела подчеркивается необходимость дальнейших исследований и

разработок, направленных на оптимизацию работы БПЛА и расширение их функциональных возможностей.

Во втором разделе проведен анализ работ, в которых решались проблемы управляемости автономного полета БПЛА. Он предлагает всесторонний обзор проблемы и излагает исследовательские задачи. В анализе определяются основные препятствия, которые могут возникнуть при решении проблем, и обсуждаются сильные и слабые стороны представленных методов.

Дополнительно рассматриваются современные алгоритмы навигации, стабилизации и планирования траектории, применяемые в автономных беспилотных летательных аппаратах.

На основе применения интервальной математики получен критерий управляемости БПЛА. Разработана программа, позволяющая эффективно проверять условия управляемости.

Предложенный подход позволяет оценивать маневренность БПЛА при различных эксплуатационных ограничениях, учитывая неопределенности в параметрах системы и внешние возмущения. Разработанное программное обеспечение включает численные алгоритмы для интервального анализа, обеспечивая надежную оценку управляемости даже в сложных динамических средах.

Кроме того, результаты моделирования демонстрируют эффективность предложенного критерия в реальных сценариях, подтверждая его применимость к широкому спектру конфигураций БПЛА. Полученные результаты способствуют развитию систем автономного управления полетом, предоставляя надежную математическую основу для оценки и повышения управляемости БПЛА.

Третий раздел посвящен анализу условий, обеспечивающих устойчивость выбранной траектории автономного полета БПЛА. Разработана программа для эффективной проверки условий устойчивости.

В исследовании рассматриваются различные критерии устойчивости, включая подходы, основанные на функциях Ляпунова, методы робастного управления и адаптивные алгоритмы, учитывающие внешние возмущения и неопределенности модели. Разработанное программное обеспечение интегрирует численные методы анализа устойчивости, позволяя в режиме реального времени оценивать устойчивость траектории БПЛА в различных операционных сценариях.

Кроме того, результаты моделирования и экспериментальной проверки подтверждают эффективность программы в выявлении потенциальных неустойчивостей и оптимизации параметров полета. Результаты способствуют разработке более надежных и устойчивых систем автономной навигации БПЛА, повышая их производительность в динамичных и непредсказуемых средах.

Четвертый раздел посвящен определению оптимальных стратегий управления для автономного полета БПЛА. Разработана программа для эффективного вычисления оптимальных решений управления полетом.

Исследование рассматривает метод оптимизации, включающий динамическое программирование для повышения энергетической эффективности БПЛА. Разработанное программное обеспечение интегрирует передовые численные алгоритмы для решения задач оптимального управления, учитывая такие ограничения, как расход топлива.

Кроме того, результаты моделирования подтверждают эффективность предложенных стратегий управления, демонстрируя повышенную точность полета, адаптивность к изменяющимся условиям и улучшенную общую производительность БПЛА. Полученные результаты способствуют разработке интеллектуальных систем управления полетом, способных автономно адаптироваться к динамическим условиям окружающей среды.

Пятый раздел посвящен разработке алгоритма распределения целей между группой БПЛА.

В исследовании рассматриваются различные стратегии оптимизации и координации, включая роевой интеллект для эффективного распределения задач между БПЛА с учетом таких ограничений, как ограничения связи, топливная эффективность и адаптивность в реальном времени. Предложенный алгоритм обеспечивает оптимальное распределение целей за счет минимизации времени выполнения миссии и максимизации использования ресурсов.

Кроме того, результаты моделирования демонстрируют эффективность алгоритма в динамических условиях, подчеркивая его способность улучшать совместные операции БПЛА в миссиях наблюдения, разведки, поиска и спасения. Полученные результаты способствуют развитию автономных мульти-БПЛА систем, позволяя более эффективно и интеллектуально выполнять миссии.

В заключительной части представлены ключевые результаты и выводы диссертации.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования были представлены на международных научных конференциях. На ежегодных научных конференциях Института информатики и проблем управления были доложены результаты по теме диссертации. Кроме того, они были обсуждены на научных конференциях молодых ученых и специалистов Казахского национального университета и научных семинарах кафедры «Искусственный интеллект и Big Data» КазНУ имени аль-Фараби.

Это позволило обсудить и проверить полученные результаты в научном сообществе, а также получить обратную связь и дополнительные рекомендации от коллег и экспертов.

Кроме того, проведена зарубежная стажировка, что способствовало обмену опытом с исследователями из других стран, углублению знаний в области исследования и расширению международных научных контактов (Приложение А).

Важно подчеркнуть, что результаты данной работы были признаны и оформлены в 17 свидетельствах о государственной регистрации прав на

объекты авторского права (Приложение Б). Это свидетельствует об оригинальности и значимости проведенных исследований.

Публикации. Теме диссертации посвящены 22 печатные работы, в том числе 9 – в научных журналах, входящем в международную базу цитирования «Scopus» (подтверждается справкой АО НЦГНТЭ о наличии публикации в журнале, входящем в базу данных Scopus – Приложение В):

1. Mazakov T.Zh., Jomartova S., Mukhaev D., Mazakova A., Tolegen G. Intelligent System for Assessing the Socio-economic Situation in the Region // Wojtkiewicz K., Treur J., Pimenidis E., Maleszka M. (eds) Advances in Computational Collective Intelligence. ICCCI 2021. Communications in Computer and Information Science, vol 1463. Springer, Cham. – 2021. – P. 437-447, doi.org/10.1007/978-3-030-88113-9_35.

2. Aliaskar M., Mazakov T., Mazakova A., Jomartova S., Shormanov T. Human voice identification based on the detection of fundamental harmonics // IEEE 7th International Energy Conference (ENERGYCON). – 2022. – P. 1-4, doi: 10.1109/ENERGYCON53164.2022.9830471.

3. Mazakova, A., Jomartova, S., Mazakov, T., Shormanov, T., Amirkhanov, B. Controllability of an unmanned aerial vehicle // IEEE 7th International Energy Conference (ENERGYCON), 2022, pp. 1-5, doi: 10.1109/ENERGYCON53164.2022.9830244.

4. Mazakova A., Jomartova S., Wójcik W., Mazakov T., Ziyatbekova G. Automated Linearization of a System of Nonlinear Ordinary Differential Equations // INTL Journal of Electronics and Telecommunications. – 2023, Vol. 69, N 4. – P. 655-660. DOI: 10.24425/ijet.2023.147684.

5. Kalimoldayev A.M., Mazakova A.T., Jomartova S.A., Mazakov T.Z., Ziyatbekova G.Z. Digital definition of optimal inventory management // In: Sergi, B.S., Popkova, E.G., Ostrovskaya, A.A., Chursin, A.A., Ragulina, Y.V. (eds) Ecological Footprint of the Modern Economy and the Ways to Reduce It. Advances in Science, Technology & Innovation. Springer, Cham. – 2023. – P. 111-115. https://doi.org/10.1007/978-3-031-49711-7_19

6. Mazakova A.T., Jomartova S.A., Mazakov T.Z., Ziyatbekova G.Z., Begaliyeva K.B. Digital determination of the thermal conductivity of a square bar by reduction to a system of integral equations // In: Sergi, B.S., Popkova, E.G., Ostrovskaya, A.A., Chursin, A.A., Ragulina, Y.V. (eds) Ecological Footprint of the Modern Economy and the Ways to Reduce It. Advances in Science, Technology & Innovation. Springer, Cham. – 2023. – P. 167-171. https://doi.org/10.1007/978-3-031-49711-7_29

7. Mazakova A.T., Nurzhanov Ch., Mazakov T. Zh., Jomartova Sh.A., Burgegulov A.D. Digital model of the influence of various environmental factors on plant biomass // In: Sergi, B.S., Popkova, E.G., Ostrovskaya, A.A., Chursin, A.A., Ragulina, Y.V. (eds) Ecological Footprint of the Modern Economy and the Ways to Reduce It. Advances in Science, Technology & Innovation. Springer, Cham. – 2023. – P. 161-165. https://doi.org/10.1007/978-3-031-49711-7_28

8. Kalimoldayev A.M., Mazakova A.T., Burgegulov A.D., Sametova A.A., Mukhayev D.K. Application of digital technologies for ranking loan borrowers // In: Sergi, B.S., Popkova, E.G., Ostrovskaya, A.A., Chursin, A.A., Ragulina, Y.V. (eds) Ecological Footprint of the Modern Economy and the Ways to Reduce It. Advances in Science, Technology & Innovation. Springer, Cham. – 2023. – P. 105-109. https://doi.org/10.1007/978-3-031-49711-7_18

9. Mazakova A., Jomartova Sh., Mazakov T., Brzhanov R., Gura D. The Use of Artificial Intelligence to Increase the Functional Stability of UAV Systems// International Review of Aerospace Engineering (IREASE). – 2024, vol 17, № 3. – P.98-106. doi.org/10.15866/irease.v17i3.25067

6 – в изданиях рекомендуемых КОКЧВО МНВО РК:

1. Mazakova A.T., Begaliyeva K.B., Mazakov T.Zh., Jomartova Sh.A., Ziyatbekova G.Z. Solution of the thermal conductivity equation of a rod with a square section by casting to a system of ordinary differential equations// New of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. al-Farabi Kazakh National University, Series Information Technology, Алматы, NAS RK, 2022 – № 3 (343) – С. 153-163.

2. Mazakova A.T., Jomartova Sh.A., Mazakov T.Zh., Ziyatbekova G.Z., Sametova A.A.. Mathematical Modeling and Development of an Automated System for Searching Ring Structures in Geology // News of the national academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Geology and Technical Sciences, 2023, №1, pp. 154-165.

3. Ziyatbekova G.Z., Bidakhmet Zh., Algozhayeva R.S., Azanbay K.T., Mazakova A.T., Suleimen I.B. Analysis of the consequences of breakdowns of hydraulic structures and the occurrence of emergency situations // Вестник Национальной инженерной академии РК, 2023, № 3(89), С. 68-77.

4. Мазакова А.Т., Джомартова Ш.А., Мазаков Т.Ж., Зиятбекова Г.З., Досаналиева А.Т. Автоматизация процесса линеаризации нелинейной модели, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями // Вестник КазУТБ. – Астана, 2023. – № 1(18). – с.7-23.

5. Мазакова А.Т., Джомартова Ш.А., Мазаков Т.Ж., Тойкенов Г.Ч., Алиаскар М.С. Параметрическая устойчивость беспилотного летательного аппарата // Вестник КазУТБ. – Астана, 2024. – № 3(24). – С. 43-51.

6. Mazakova A.T., Jomartova Sh.A., Mazakov T.Zh., Toikenov G.Ch., Aliaskar M.S. Optimal Control of An Unmanned Aerial Vehicle // Вестник КазУТБ. – Астана, 2024. – № 3(24). – С. 64-71.

3 статьи опубликовано в материалах международных научно-практических конференций:

1. Mazakov T.Zh., Jomartova S., Mukhaev D., Mazakova A., Tolegen G. Intelligent System for Assessing the Socio-economic Situation in the Region // Wojtkiewicz K., Treur J., Pimenidis E., Maleszka M. (eds) Advances in Computational Collective Intelligence. ICCCI 2021. Communications in Computer and Information Science, vol 1463. Springer, Cham. 2021. – P. 437-447. doi.org/10.1007/978-3-030-88113-9_35.

2. Aliaskar M., Mazakov T., Mazakova A., Jomartova S., Shormanov T. Human voice identification based on the detection of fundamental harmonics // IEEE 7th International Energy Conference (ENERGYCON). – 2022. – P. 1-4. doi: 10.1109/ENERGYCON53164.2022.9830471.

3. Mazakova A., Jomartova S., Mazakov T., Shormanov T., Amirkhanov B. Controllability of an unmanned aerial vehicle // IEEE 7th International Energy Conference (ENERGYCON). – 2022. – P. 1-5. doi: 10.1109/ENERGYCON53164.2022.9830244.

Индекс Хирша в «Scopus» равен 3.

1 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

1.1 Литературный обзор

Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) стремительно развиваются по всему миру, что обусловлено растущей потребностью в легких, экономичных и высокоманевренных летательных аппаратах, способных выполнять широкий спектр операций. Их универсальность делает их незаменимыми в различных областях, включая военную оборону, реагирование на стихийные бедствия, мониторинг окружающей среды, сельское хозяйство, логистику и телекоммуникации. Достижения в области искусственного интеллекта, автоматизации и аккумуляторных технологий еще больше повышают их эффективность, автономность и адаптивность, расширяя их потенциальные возможности применения как в коммерческом, так и в государственном секторе.

Мы будем исследовать БПЛА самолетного типа. Такие БПЛА характеризуются тем, что осуществляют полеты на большие расстояния, могут доставлять грузы, имеют возможность длительного видеомониторинга в видимом и в инфракрасном спектре. Таким образом, такие БПЛА очень часто используются для аэрофотосъемок больших территорий для задач георазведки, в случае лесных пожаров, для мониторинга сельского хозяйства и т.д. Например, беспилотный комплекс M5 AGRO, в котором есть БПЛА самолетного типа «Альбатрос» (рис.1). Он самостоятельно обрабатывает всю информацию по сельхоз полям [1].



Рисунок 1. БПЛА «Альбатрос» [1]

Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) находят все более широкое применение в сельском хозяйстве, предоставляя новые возможности для улучшения процессинга, оптимизации ресурсов и увеличения урожайности.

Вот некоторые области их применения [2-3]:

Мониторинг урожайности: БПЛА могут быть использованы для сбора данных о состоянии посевов, что позволяет фермерам оценить уровень урожайности и обнаружить проблемные участки на полях.

Аэрофотосъемка: БПЛА с высококачественными камерами могут выполнять аэрофотосъемку, предоставляя точные изображения полей, которые помогают в планировании и управлении.

Засоление и анализ почвы: Используя специальные датчики, БПЛА могут анализировать качество почвы, определять уровни влажности и pH, что помогает в принятии решений о внесении удобрений и других агрономических мерах.

Обнаружение заболеваний растений: БПЛА могут быть оснащены тепловыми и мультиспектральными камерами для выявления заболеваний растений или вредителей до того, как они начнут заметно угрожать урожаю.

Оптимизация полива: Специальные датчики, установленные на БПЛА, могут определять уровень влажности почвы, что позволяет оптимизировать систему орошения и предотвращать перерасход воды.

Применение пестицидов и удобрений: БПЛА могут использоваться для точечного распыления пестицидов и удобрений, что уменьшает количество химикатов, воздействующих на окружающую среду, и увеличивает эффективность применения.

Картографирование: БПЛА могут создавать высококачественные карты полей, которые помогают в разработке стратегий посевов и управления ресурсами.

Анализ для планирования посевов: Данные, собранные с помощью БПЛА, могут быть использованы для анализа предыдущих урожаев и планирования последующих посевов на основе данных о погоде, здоровье почвы и других условиях.

Управление рисками: С помощью БПЛА можно быстрее и точнее оценивать ущерб от природных катастроф, таких как наводнения или ураганы, что помогает фермерам принимать более обоснованные решения о восстановлении.

Использование БПЛА в сельском хозяйстве позволяет значительно повысить эффективность работы, снизить затраты и минимизировать негативное воздействие на окружающую среду.

Расширение применения БПЛА в гражданском секторе ограничено правовыми нормами, но тем не менее благодаря своей гибкости, эффективности и способности выполнять задачи, которые могут быть сложными или опасными для человека они находят применение в следующих областях гражданского сектора:

- в сельском хозяйстве – мониторинг состояния посевов и здоровья растений, применение удобрений и пестицидов, сбор данных для анализа и планирования урожайности.

- в строительстве – обследование стройплощадок и объектов, инспекция инфраструктуры, 3D-моделирование и карты местности.

- в геодезии – создание высокоточных карт, сбор данных для анализа и исследований.

- в логистике – доставка товаров и медицинских препаратов в удаленные или труднодоступные районы, оптимизация доставки и управление запасами.

- для охраны окружающей среды – мониторинг состояния экосистем и биоразнообразия, контроль за выбросами, помощь в борьбе с лесными пожарами через мониторинг и оценку ущерба, борьба с браконьерами и незаконными рубками, мониторинг таяния ледников.

- в охране правопорядка - использование для мониторинга массовых мероприятий и обеспечения безопасности, проведение поисково-спасательных операций и помощь в чрезвычайных ситуациях.

- в кинематографии – съемка видеоматериалов и фотографий с воздуха для фильмов, рекламы и мероприятий.

- в научных исследованиях - сбор данных для климатических исследований, изучение миграции животных и мониторинг природных явлений, исследование труднодоступных мест, таких как вулканы или ледники.

За последние 10-15 лет значительно возросло использование данных фотосъемки, которые были доставлены при помощи БПЛА. Большое количество современных научных статей, посвященных, например, исследованию лесных экосистем [4-6] были написаны с помощью материалов, полученных с БПЛА. Благодаря таким работам были выявлены показатели состояния леса, заболеваний леса, а также предотвращены пожары. В прошлом работа по обнаружению лесных пожаров осуществлялась авиацией и пешими обходами лесов лесниками. Однако наземное обнаружение ограничено по площади, а полеты авиации дорогостоящие.

Использование БПЛА для обнаружения лесных пожаров представляет собой перспективное направление, которое может значительно улучшить эффективность мониторинга и реагирования на пожары (рис. 2). После обнаружения пожара БПЛА могут использоваться для оценки ущерба и планирования действий по тушению. Использование БПЛА снижает риск для людей, так как они могут работать в опасных условиях, а также могут сократить затраты на мониторинг и обнаружение по сравнению с традиционными методами.



Рисунок 2. Гидроплан «Flyox I» (для тушения лесных пожаров) [7]

В настоящее время БПЛА могут делать высококачественные фотографии местности, которые затем могут быть геопривязаны с помощью GPS-координат. Это позволяет создавать точные карты и анализировать изменения в ландшафте. Использование тепловизионных камер на БПЛА для обнаружения аномалий температуры, что может указывать на наличие термальных источников (рис. 3). Регулярные полеты над месторождениями позволяют отслеживать изменения в экосистеме, такие как изменения в растительности или водоемах, которые могут быть связаны с термальными водами. Собранные данные могут быть использованы для создания отчетов и анализа, что помогает в принятии решений по управлению ресурсами [8].

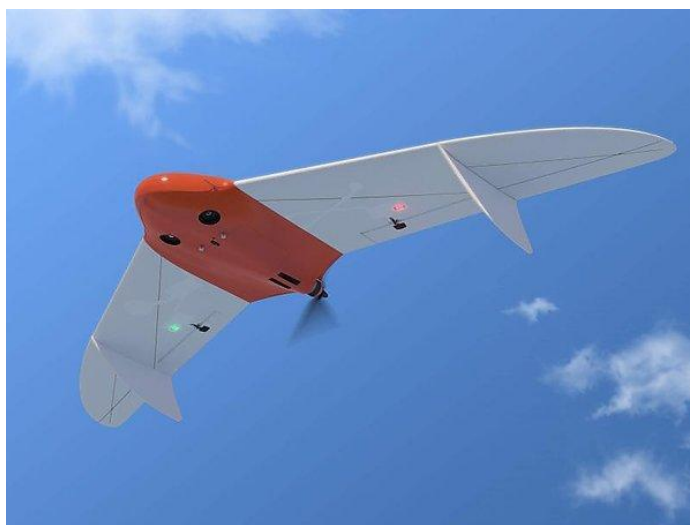


Рисунок 3. Геоскан 201 – для получения геопривязанных фотографий [9]

БПЛА имеют ряд преимуществ [10]:

- они экономят деньги, так как не требуют дорогостоящего оборудования для жизнеобеспечения и обучения пилотов;
- БПЛА потребляют меньше топлива по сравнению с пилотируемыми самолетами.
- они могут использоваться без необходимости бетонных аэродромов, которые требуют постоянного ремонта;
- при использовании автоматического управления исключается человеческий фактор;
- создание и эксплуатация БПЛА обходится значительно дешевле, чем пилотируемых самолетов.

Классификация БПЛА происходит по различным признакам:

- тип летательного аппарата: самолет, вертолет, автожир, мультикоптер и другие;
- тип управления: автоматическое, операторское (ДПЛА) и гибридное;
- максимальная взлетная масса и дальность действия различаются в зависимости от класса БПЛА (Таблица 1) [11].

Таблица 1. Классы БПЛА по дальности действия и взлетной массе.

По дальности действия		
Класс	Дальность, км	Применение
Короткодействующие БПЛА	до 10	используются для локальных задач, таких как мониторинг и наблюдение
Среднедействующие БПЛА	от 10 до 100	картографирование и исследование
Дальнодействующие БПЛА	более 100	используются в военных и научных целях, могут выполнять длительные миссии и собирать данные на больших расстояниях
По взлетной массе		
Класс	Масса, кг	Применение
Микро-БПЛА (Micro UAV)	до 2	для разведки и наблюдения на малых расстояниях
Мини-БПЛА (Mini UAV)	от 2 до 15	мониторинг и картографирование
Малые БПЛА (Small UAV)	от 15 до 150	используются в коммерческих и военных целях, включая доставку грузов и выполнение сложных миссий
Средние БПЛА (Medium UAV)	от 150 до 600	могут выполнять длительные полеты и нести более тяжелые нагрузки
Большие БПЛА (Large UAV)	более 600	используются для военных операций, научных исследований и крупных коммерческих проектов

«Согласно воздушному кодексу РФ, обязательной является постановка на учёт БПЛА с взлётной массой от 0,15 до 30 кг, а также регистрация БПЛА с весом более 30 кг (для управления такими БПЛА необходим сертификат лётной годности и свидетельство внешнего пилота)» [12-13].

Классификация БПЛА в США осуществляется в соответствии с правилами Федеральной авиационной администрации (FAA) и другими регулирующими органами.

В США классифицирует БПЛА по оперативным параметрам (таким как масса, рабочая высота, скорость) на пять групп (Таблица 2).

Таблица 2. Классификация БПЛА

Группа	Масса, кг	Рабочая высота, м	Скорость (узлов)
1	до 9	до 360	от 45 до 50
2	от 9 до 25	до 1050	до 250
3	до 600	до 5400	
4	более 600	более 5400	любая
5			

Если рассматривать современное состояние развития БПЛА, то на мировом рынке БПЛА лидируют Израиль, США, Китай и Канада [14]. Больше половины всех экспортированных БПЛА с 1985 по 2024 год были израильского производства. В Израиле также активно тестируются программы по сбору урожая с помощью БПЛА.

В Китае в 2023 году рынок производства БПЛА вырос на треть и составил 505,95 млрд. юаней. Дроны в Китае используются для различных целей. В 2024 году открыли первую в мире дорогу, которую построили строительные БПЛА и впервые был изобретен гиперзвуковой БПЛА.

В России также активно развивается отрасль БПЛА. Производство БПЛА к 2030 году планируют увеличить почти в девять раз и тем самым вырастет доля рынка беспилотников с 40% до 70%. На международной выставке многие страны заинтересовались многофункциональным комплексом «Орлан-10Е», который автономен и обладает высокой точностью полета. БПЛА «Орион-Э» может функционировать в любых метеоусловиях и выполнять различные задачи по разведке и патрулированию.

В 2011 году в Соединенных Штатах произошло историческое событие - первый полет X-47В, передового БПЛА. Этот современный самолет был разработан с высокой степенью автономности, позволяющей ему взлетать, перемещаться и приземляться полностью без вмешательства человека. Одним из самых новаторских его достижений стала способность автономно приземляться на авианосец, которая ознаменовала значительный прогресс в технологии БПЛА.

В дальнейшем, демонстрируя свои возможности, в апреле 2015 года X-47В успешно провел первую в истории полностью автономную операцию по дозаправке в воздухе. Это достижение продемонстрировало потенциал БПЛА для автономной работы в течение длительных миссий, открывая путь для будущих достижений в беспилотных боевых и разведывательных системах. Успех программы X-47В заложил основу для разработки автономных летательных аппаратов следующего поколения, оказав влияние на стратегии военной авиации во всем мире.

В 2023 году в Казахстане был произведен собственной разработки первый БПЛА. Он был создан по заказу министерства индустрии и инфраструктурного развития. Основное назначение его было в обследовании нефте- и газопроводов, в мониторинге линий электропередач. Также его можно использовать в чрезвычайных случаях, в поисково-спасательных операциях. БПЛА назвали «Шагала-М» (рис.4), преимущество его в том, что для него не нужна взлетная полоса и для Казахстана он дешевле зарубежных аналогов [15].

В том же 2023 году на Петропавловском заводе тяжелого машиностроения (Казахстан) совместно с Китаем запустили производство БПЛА шести моделей, среди которых есть модели самолетного типа (рис.5).

БПЛА планируют использовать в поисково-спасательных операциях, в сельском хозяйстве, в инженерно-технических целях с использованием 3D-

моделирования местности. Территория Казахстана имеет большую протяженность и много труднодоступных мест – горы, леса, поэтому использование БПЛА оправдано. Последние события в Казахстане – лесные пожары, паводковые наводнения – показали важность и необходимость использования БПЛА.



Рисунок 4. БПЛА «Шагала-М» [15]



Рисунок 5. Модель самолетного типа, произведенная в Казахстане [16]

В современном мире большинство БПЛА управляются вручную, с использованием радиуправления. Однако такой метод управления сталкивается с рядом трудностей, такими как: подготовка пилотов, недостаточная рабочая дальность полета и ограничения из-за погодных условий. Управление БПЛА во многих отношениях сложнее, чем управление обычным самолетом, и большинство аварий происходят из-за ошибок пилотов-операторов и механических отказов, т.е. присутствует так называемый человеческий фактор. Из недостатков стоит отметить уязвимость систем дистанционного управления, что может быть опасно для БПЛА.

Для эффективного выполнения таких задач, как мониторинг окружающей среды, точное земледелие, доставка грузов, поисково-спасательные операции и многих других применений, используется беспилотная авиационная система (БАС). БАС включает в себя несколько компонентов, в том числе БПЛА, наземную станцию управления, системы связи и навигации, а также различные датчики и бортовое оборудование.

Эти интегрированные системы позволяют БПЛА работать автономно или полуавтономно, обеспечивая сбор данных в реальном времени, точную маневренность и адаптируемость к задачам. Достижения в области искусственного интеллекта, объединения датчиков и машинного обучения еще больше расширяют возможности БАС, позволяя улучшить принятие решений, обход препятствий и оптимизировать выполнение задач. По мере развития технологий приложения БАС продолжают расширяться, играя решающую роль в отраслях, начиная от реагирования на стихийные бедствия и инспекции инфраструктуры до обороны и логистики.

Летательный аппарат без пилота на борту, такие как квадрокоптеры, самолеты, вертолеты и т.д. могут выполнять различные задачи. Управление ими осуществляется операторы с помощью компьютеров, систем связи и других устройств. Связь между БПЛА и наземной станцией обеспечивается с использованием радиочастоты, спутниковой связи или других технологии для передачи данных и команд.

БАС обычно включает в себя GPS и другие навигационные системы, которые помогают БПЛА определять свое местоположение и следовать заданному маршруту. Сами БПЛА могут быть оснащены различными сенсорами (камеры, инфракрасные датчики, радары и т.д.) для сбора данных или выполнения задач, таких как наблюдение, мониторинг или доставка. Собранные данные передаются программному обеспечению, которое управляет полетом БПЛА, обрабатывает данные с сенсоров и обеспечивает взаимодействие между всеми компонентами системы.

Алгоритмы и программное обеспечение во многих БПЛА являются закрытой информацией, но тем не менее можно сделать обзор статей по направлению изучения, а также по возможностям БПЛА.

Исследование в статье [17] посвящено развертыванию сетей БПЛА на базе многозвенных дронов с акцентом на самоорганизацию. Авторы изучали соединения, в которых каждый дрон-спасатель подключается к шлюзу через выделенные дроны-ретрансляторы.

Интернет дронов (IoD) — это многоуровневая структура управления сетью, разработанная для регулирования доступа дронов к контролируемому воздушному пространству и упрощения навигации между назначенными точками, известными как узлы. Она предлагает стандартизированные услуги для широкого спектра приложений дронов, включая доставку посылок, мониторинг трафика, поисково-спасательные операции и многое другое. В работе [18] была представлена концептуальная модель архитектуры IoD, определены функции, которые должна реализовать система IoD на основе авторской архитектуры. Для достижения этой цели исследователи изучили основополагающие принципы трех ключевых сетей — систем управления воздушным движением, сотовых сетей и Интернета — и проанализировали их взаимосвязи в рамках недавно разработанной системы управления движением дронов. Целью их исследования была интеграция этих сетей для обеспечения бесперебойной связи, навигации и координации автономных операций БПЛА.

В [19] авторы предлагают разработку автономного БПЛА, который работает с использованием беспроводной технологии и управляется через графический пользовательский интерфейс (GUI). Этот подход направлен на повышение эффективности и доступности операций БПЛА, обеспечивая мониторинг в реальном времени, дистанционное управление и адаптивное планирование полетов. Благодаря использованию протоколов беспроводной связи предлагаемая система БПЛА может оптимизировать выполнение задач в различных приложениях, таких как наблюдение, логистика и реагирование на стихийные бедствия, сохраняя при этом высокий уровень автономности и эксплуатационной надежности.

Их конструкция способна летать автономно и автоматически отслеживать предварительно загруженную миссию. Цель этой работы заключается в создании квадрокоптера, который будет стремиться стабилизировать свое положение на желаемой высоте.

Предлагаемая работа [20] содержит модель программно-аппаратного комплекса для определения пространственно-временного состояния объекта на основе Arduino, предназначенного для интеграции в системы мониторинга с использованием волоконно-оптических датчиков.

Авторы [21] исследовали потенциал автоматизации роботизированных процессов в сочетании с обработкой изображений, распознаванием образов и машинным обучением. Они проанализировали наиболее эффективные приложения этой технологии, чтобы максимизировать ее влияние.

Автоматизированные системы могут выполнять задачи более эффективно, экономично и с большей скоростью. Аэрокамеры, установленные на дронах и спутниках, позволяют проводить точные измерения наземных объектов, особенно в сельскохозяйственных районах. Со временем возможности дронов улучшились, а их стоимость снизилась, что привело к их широкому внедрению, особенно на сложных участках. Со временем возможности дронов расширились, и их стоимость снизилась, что привело к расширенному применению на сложной местности, особенно в сельском хозяйстве, несмотря на споры, вызванные их использованием.

В связи с быстрым распространением использования БПЛА в военных и силовых целях на внутреннем рынке возникла проблема конфиденциальности и защиты данных, на которую обращено внимание в статье [22]. Она посвящена анализу рисков и усилиям по созданию основы для решения этих проблем.

В работе [23] авторы предлагают самоадаптирующуюся программную архитектуру LiveBox, чтобы адаптировать дроны для криминалистической экспертизы и соответствия нормативным требованиям. Используя практический сценарий полета дронов, они показали, что их разработанный алгоритм сокращает до 46% пропускную способность данных без ущерба для точности, при этом обеспечивают устойчивость к несанкционированному доступу и соответствуют нормативным требованиям.

Для устранения ограничения дальности в работе [24] была использована иерархическая древовидная топология для создания беспроводной сети дронов. В эту сеть входят три основные компоненты: Центр управления (ЦУ), Главный дрон (ГД) и Подчиненные дроны (ПД). Действуя в качестве сетевого менеджера, ЦУ взаимодействует только с ГД через телеметрические устройства. ПД функционируют как разведывательные дроны для поисково-спасательных операций, причем передача данных между ЦУ и ПД осуществляется ГД, который также служит ретранслятором.

Исследование показывает, что этот подход значительно расширяет дальность связи. Результаты моделирования показывают, что предлагаемая система сети дронов является высокоэффективной, обнаруживая цель в течение 5 минут, тогда как обычная система занимает более 10 минут и все равно может не найти ее. Результаты исследования показывают, что модель обеспечивает более быстрое выполнение задач и улучшает организацию роя дронов.

Дроны получают широкое применение в гражданских сферах, поскольку их возможно программировать и осуществлять коммуникацию издалека с людьми через сети. Однако у дронов есть ограничения по переносимой нагрузке и запасу энергии, что снижает их ресурсы. Некоторые задачи требуют координации действий нескольких дронов. Интеграция близлежащих устройств – тех, у которых есть дополнительные ресурсы, превышающие возможности дронов – вместе с улучшенным управлением несколькими дронами может помочь преодолеть эти ограничения. Статья [25] представляет и исследует концепцию программируемых беспилотных летательных аппаратов с массовым питанием, используя две ключевые идеи: интеграцию дронов со смартфонами для создания облачного пула общих ресурсов. Авторы уделяют внимание краудсорсингу для вычислений средствами дронов и управлению группой дронов с помощью нового языка сценариев для координации полетов нескольких дронов.

В статье [26] представлены результаты взаимодействия между людьми и дронами, а также дронами и людьми в сельскохозяйственном секторе, где ожидается взаимодействие как с обученными, так и необученными работниками и посетителями. В исследовании рассматривались результаты распознавания изображений и последующие операции дронов и автономных роботов для поддержки этих взаимодействий.

В статье [27] авторы изучают современные детекторы сверточных объектов для системы обнаружения и отслеживания дронов в реальном времени с использованием камеры PTZ. Поскольку дроны стали доступны по низкой цене, возросли и угрозы, связанные с их потенциальным использованием для вредоносных целей. В их исследовании детектор объектов используется для определения присутствия дрона на изображении с камеры PTZ. После обнаружения дрона, их система автоматически настраивает камеру PTZ для его отслеживания. В статье проводится сравнительный анализ шести детекторов по точности и скорости, поскольку

для обнаружения маленьких дронов в реальном времени необходимо правильно выбрать детектор объектов.

За последние десятилетия был накоплен обширный опыт использования беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) в экстренных ситуациях, природных катастрофах, а также для поддержки телекоммуникаций, метеорологических наблюдений, охраны границ и других гражданских нужд. Это объясняется тем, что БПЛА имеют более низкие эксплуатационные расходы по сравнению с самолетами, проще в обслуживании, могут значительно увеличивать время полета и эффективно функционировать в условиях низкой видимости или в опасных для пилота ситуациях.

Однако одна из основных проблем в эксплуатации БПЛА заключается в их эффективном управлении. В настоящее время дистанционное управление широко используется для выполнения различных задач, но его эффективность в значительной степени зависит от качества связи и условий окружающей среды. Перебои в сигнале, задержки и неблагоприятные погодные условия могут значительно повлиять на производительность БПЛА, ограничивая их надежность и дальность действия.

Повышение автономности БПЛА имеет решающее значение для преодоления этих ограничений. Это требует разработки передовых методов и алгоритмов, позволяющих БПЛА выполнять миссии самостоятельно, без вмешательства человека.

Передовые технологии, такие как искусственный интеллект, машинное обучение и объединение датчиков, играют ключевую роль в улучшении автономной навигации, обхода препятствий и принятия решений. За счет повышения автономности БПЛА могут более эффективно работать в сложных условиях, расширяя область их применения в таких областях, как реагирование на чрезвычайные ситуации, инспекция инфраструктуры и беспилотная логистика.

Поэтому создание автоматизированных подходов к планированию траекторий, которые учитывают окружающие условия, представляет собой актуальную и важную задачу.

Управление полетом продолжает оставаться одной из ключевых сфер в разработке беспилотных летательных аппаратов (БПЛА). Необходимые алгоритмы должны быть созданы с целью обеспечения надежного управления в реальном времени, повышения точности навигации и гарантии безопасности полетов. Тем не менее, применение оптимальных методов управления сталкивается с ограничениями, вызванными сложностью математических динамических моделей, что делает задачу еще более трудной. Применение адаптивных систем может помочь преодолеть эти ограничения, позволяя разработать более совершенные и устойчивые алгоритмы, способные адаптироваться к изменяющимся условиям полета и внешним воздействиям.

Обзор современных исследований показал, что методы оптимизации для сложных систем, особенно тех, которые включают прогностические модели, пока не получили широкого распространения. Это в основном связано с

отсутствием четко определенных методологий и численных стратегий решения, а также с растущей вычислительной сложностью по мере роста размеров системы. Для достижения оптимального управления БПЛА крайне важно получать данные о параметрах движения в реальном времени. Таким образом, работы по разработке и исследованию математических моделей и методов управления для БПЛА остаются в центре внимания в научном сообществе и остаются крайне актуальными.

1.2 Постановка задач

При анализе динамических систем (такими системами являются БПЛА самолетного типа с автоматическим управлением) огромную роль играет понятие управляемости. Это позволяет рассмотреть системы с точки зрения их управляемости, стабильности и оптимального функционирования. Для эффективного решения этих задач используются различные математические методы. Например, методы динамического программирования, Понтрягина и Кротова показывают отличные результаты при оптимизации управления динамическими системами с ограниченными ресурсами [28]. Однако перед тем, как перейти к оптимальному управлению, необходимо изучить возможности управления динамической системой. Исследования устойчивости этих систем широко освещены в трудах Ляпунова А.М. [29].

Современные исследования в области динамических систем все больше полагаются на вычислительные методы и передовые вычислительные технологии. Эта тенденция открывает новые возможности для разработки специализированного программного обеспечения, автоматизации процессов управления и углубленного анализа автоматизированных систем управления [30]. Более того, интеграция искусственного интеллекта и машинного обучения дополнительно повышает эффективность моделирования, прогнозирования и оптимизации в сложных динамических условиях. Эти достижения способствуют созданию более адаптивных и интеллектуальных решений управления, улучшая производительность, надежность и принятие решений в различных инженерных и промышленных приложениях. Также компьютерные методы позволяют проводить более детальный анализ и синтез систем, обладающих определенными свойствами [31].

При анализе динамических систем большое внимание уделяется понятию устойчивости. Устойчивость системы означает ее способность сохранять стабильность при воздействии внешних факторов и изменении параметров. Основы теории устойчивости были заложены еще в 1872 году А.М.Ляпуновым [29].

Благодаря современным вычислительным методам также возникают новые возможности для анализа и синтеза динамических систем, включая использование методов и программного обеспечения компьютерной алгебры [32-34].

Для исследования управляемости динамических систем существуют подходы, основанные на оценке области достижимости. Для линейных систем без ограничений на управление был получен критерий Калмана [35], который эффективно решает эту проблему. Для нелинейных систем с ограничениями на управление подобные результаты отсутствуют, что делает исследование управляемости динамических систем с ограниченным управлением актуальной задачей как с теоретической, так и с практической точек зрения.

Одновременно с этим при анализе динамических систем возникают сложности с проверкой условий различных критериев устойчивости, управляемости и оптимального управления. Эта сложность требует от разработчиков систем хорошей математической подготовки, что ограничивает распространение применения этих систем. Следовательно, автоматизация проверки условий критериев является актуальной задачей.

Под управляемостью системы обычно понимается возможность наличия управления, которое обеспечивает перевод системы из начального состояния в заданное конечное состояние за фиксированное время.

$$\begin{cases} \dot{V} = g(n_{xa} - \sin\Theta) \\ \dot{\Theta} = g(n_{ya}\cos\gamma - \cos\Theta)/V \\ \dot{\Psi} = -gn_{ya}\sin\gamma/(V\cos\Theta) \\ \dot{x} = V\cos\Theta\cos\Psi \\ \dot{y} = V\sin\Theta \\ \dot{z} = -V\cos\Theta\sin\Psi \end{cases} \quad (1.1)$$

$$n_{xa} = \frac{P\cos\alpha - X_a}{mg}, n_{ya} = \frac{P\sin\alpha + Y_a}{mg} \quad (1.2)$$

В этой формуле: x, y, z представляют собой координаты центра масс БПЛА самолетного типа в стандартной земной системе координат; V обозначает скорость полета БПЛА, при этом также учитываются угол наклона траектории Θ , угол курса Ψ , угол атаки α и угол крена γ . P представляет собой тягу двигателя БПЛА, аэродинамическое сопротивление и аэродинамическая подъемная сила обозначаются соответственно X_a и Y_a , m обозначает массу БПЛА, а g является ускорением свободного падения. Кроме того, при анализе учитываются продольные n_{xa} и поперечные n_{ya} перегрузки (относительно осей воздушного потока) [36].

В качестве управляющих переменных в (1.1) принимается перегрузки n_{xa}, n_{ya} .

Введем обозначения:

$$q = \begin{bmatrix} V \\ \Theta \\ \Psi \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, q_0 = \begin{bmatrix} V_0 \\ \Theta_0 \\ \Psi_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, q_1 = \begin{bmatrix} V_1 \\ \Theta_1 \\ \Psi_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} n_{xa} \\ n_{ya} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Используя введенные обозначения перепишем систему дифференциальных уравнений (1.1) в виде:

$$\frac{dq}{dt} = f(q) + B(q)u \quad (1.4)$$

где u – управление,

$$f(q) = \begin{pmatrix} -g(\sin\Theta) \\ -g(\cos\Theta)/V \\ 0 \\ V\cos\Theta\cos\Psi \\ V\sin\Theta \\ -V\cos\Theta\sin\Psi \end{pmatrix}, B(q) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g(\cos\gamma)/V \\ 0 & -g\sin\gamma/(V\cos\Theta) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В диссертационной работе рассматриваются следующие задачи:

1. Задача управляемости динамики БПЛА: возможно ли определить такое управление u , принадлежащее множеству

$$u \in U \quad (1.5)$$

и переводящее систему из заданного состояния q_0

$$q(t_0) = q_0 \quad (1.6)$$

в конечное состояние q_1 к моменту времени t_1 :

$$q(t_1) = q_1 \quad (1.7)$$

2. Задача устойчивости полета БПЛА: если управляемость возможна, то целесообразно выбрать траекторию, обеспечивающую устойчивую динамику полета БПЛА.

3. Задача оптимального управления БПЛА: если управляемость возможна, целесообразно выбрать управление, которое помимо достижения поставленной задачи, минимизирует некий критерий (например, затраты энергии или время выполнения).

$$J(u) \rightarrow \min_{u \in U} \quad (1.8)$$

4. Задача управления группой: при наличии группы БПЛА в воздухе необходимо выбрать подгруппу, способную решить поставленную задачу, т.е. достичь заданных координат за фиксированный период времени (1.7). Затем поставить задачу для конкретного БПЛА из этой подгруппы.

1.3 Выводы по первому разделу

В данном разделе, исходя из анализа различных методов управления полетами, были определены цель и основные задачи исследований, направленных на управление как одиночным, так и групповым полетом БПЛА.

В процессе анализа, при рассмотрении методов решения задачи управления полетами были выявлены их преимущества и недостатки. Также задача управления подробно проанализирована и определены основные трудности, которые могут возникнуть при ее решении. Кроме того, дается общий обзор проблемы, а также формулируются цели исследования.

В результате проведенного анализа были установлены ключевые факторы, влияющие на эффективность управления полетами БПЛА. Выявленные недостатки существующих методов управления позволили сформулировать рекомендации по их улучшению. Кроме того, были определены основные направления для дальнейших исследований, включая разработку новых алгоритмов управления и оптимизацию существующих подходов. Эти выводы подтвердили необходимость комплексного подхода к решению задач управления полетами, что станет основой для практической реализации предложенных решений.

Эти результаты являются основой для дальнейших исследований, которые будут проведены в последующих разделах диссертационной работы.

2 УПРАВЛЯЕМОСТЬ БПЛА

2.1 Литературный обзор по проблеме управляемости

Проблема управляемости динамических систем – одна из ключевых задач в теории управления. При создании и использовании динамических систем критически важно обеспечить достижение заданной цели и заранее определить, обладает ли система свойством управляемости, и достаточно ли для этого ресурсов.

Изучение управляемости впервые было выполнено Р. Калманом [35], который установил необходимые и достаточные условия управляемости линейных стационарных систем без ограничений по управлению. Для нестационарных линейных систем достаточные условия управляемости вывел Н. Н. Красовский [37]. Аналогичные вопросы, исключающие ограничения по управлению, исследовались также в работах В. Н. Семенова [38], С. Гершвина и Д. Якобсона [39], Л. Ханта [40].

Федоров А. Ю. [41] предложил достаточные условия управляемости нелинейных систем, аналогичные критериям Калмана для линейной аппроксимации исходной системы. В [42] был введен критерий управляемости для нелинейных систем с фазовыми ограничениями.

Ковалев А. М. [43] представил критерий управляемости нелинейных систем, который включает проверку существования решений уравнений в частных производных типа Ляпунова (из теории устойчивости) и типа Леви-Чивиты (из теории инвариантных многообразий).

Кроме того, в [44] Мастерков Ю.В. ввел понятие глобальной устойчивой управляемости для нелинейных систем и привел достаточные условия для достижения этого типа управляемости.

В [45] было рассмотрено управление выборкой данных для линейных нестационарных систем. Классическое неравенство Халаная было распространено на систему с изменяющимися во времени выборочными данными. С использованием принципа сравнения и обобщенного неравенства Халаная были выведены новые критерии глобально равномерной экспоненциальной и асимптотической устойчивости в соответствующей замкнутой системе. Также был представлен алгоритм синтеза коэффициентов усиления.

В работе [46] изучены основные свойства управляющих множеств линейных систем на полупростых группах Ли. Показано, что в отличие от разрешимого случая, линейные системы на полупростых группах Ли могут иметь более одного управляющего множества с непустой внутренней частью, содержащегося в правых сдвигах единичного управляющего множества.

В работе [47] рассматривается управляемость векторной дифференциальной системы Стилтеса с g -производной. Решение получается путем построения обобщенной матричной экспоненциальной функции для линейной системы и перевода задачи в класс импульсных дифференциальных

уравнений Стильеса для неоднородного решения. Установлены критерий Грамиана и ранговый критерий для линейного случая. Для нелинейной системы существование локального и глобального решения продемонстрировано с использованием принципа стягивания и теоремы Красносельского о неподвижной точке. Моделирование проведено для проверки эффективности результатов.

В работе [48] исследуются теоретические свойства оптимального по быстродействию автоматического управления для линейных систем, не зависящих от времени. Основная цель управления – максимизировать время, в течение которого значение управления равно нулю, и минимизировать время отклика для достижения заданного перехода между состояниями. Для этого используется функция стоимости, которая описывается линейной комбинацией меры и времени отклика элемента управления. Используется релаксационная техника для анализа оптимального управления из-за невыпуклости и разрывности меры. Показывается существование оптимального по быстродействию автоматического управления и его эквивалентность при условии нормальности.

В статьях [49,50] рассматривается оптимальная фильтрация и оптимальное управление с обратной связью по выходу для дискретных линейных негауссовских систем с изменяющимся временем. Результаты Р.Калмана обобщены на случай квазилинейных систем в работах В.И.Зубова [51,52].

В Казахстане также активно ведутся исследования в области управляемости, чему свидетельствуют работы многих ученых, таких как А.О.Жаутыков [53], Д.С. Джумабаев [54], С.А. Айсагалиев [55], Т.Н. Бияров [56], М.Н. Калимолдаев [57], З.Н. Мурзабеков [58], Т.Ж. Мазаков и Ш.А. Джомартова [59].

Выводы, приведенные выше, относятся в основном к линейным системам. Для нелинейных систем конструктивных универсальных критериев управляемости не существует. Исследования в этой области ведутся в различных направлениях с использованием различных методов, таких как анализ линеаризованных систем, рассмотрение различных типов нелинейностей и добавление дополнительных ограничений на положение траектории и управление.

В последние годы, например, в России было защищено много диссертаций, что свидетельствует об актуальности исследования проблем управляемости [60-66].

2.2 Критерий управляемости БПЛА

Рассматривается система управления, которая описывается нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{q} = f(q) + B(q)u(t), \quad (2.1)$$

где $f(q)$ – функция, дифференцируемая по аргументу q на компактном подмножестве из множества R^n , q – n -мерный вектор состояния системы, $u(t)$ – управление.

Также даны дополнительные ограничения на значения управления в виде:

$$u(t) \in U = \{u(t): u(t) \in C[[t_0, t_1]; 0 \leq u(t) \leq L, t \in [t_0, t_1]]\}. \quad (2.2)$$

Исследуется «задача существования управления, удовлетворяющего ограничению (2.2) и переводящего систему из начального состояния

$$q(t_0) = q_0. \quad (2.3)$$

в заданное конечное состояние

$$q(t_1) = q_1. \quad (2.4)$$

за фиксированное время $t_1 - t_0$ » [65].

Из-за свойств, наложенных на правую часть системы уравнений в задаче Коши (2.1)–(2.4), для фиксированного управления $u(t) \in U$ выполняются условия теоремы существования и единственности для решения $q(t)$, где $t \in [t_0, t_1]$ [67].

Запишем интегральную рекуррентную форму для задачи Коши (2.1)–(2.4)

$$q(t) = q_0 + \int_{t_0}^t f(q(\tau))d\tau + \int_{t_0}^t B(q)u(\tau)d\tau. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) является частным случаем интегрального уравнения Вольтерра-Урысона второго рода [68]

$$w(t) = q_0 + \int_0^t K(\tau, w(\tau))d\tau,$$

где

$$w(t) = q(t); \quad K(\tau, w(\tau)) = f(w(\tau), \tau) + B(w(\tau))u(\tau).$$

Обозначим интервальную вектор-функцию

$$K(\tau, w(\tau)) = f(w(\tau), \tau) + B(w(\tau)) * v, t \in [t_0, t_1]. \quad (2.6)$$

где $v = (L/2, L/2)$ – интервал от 0 до L , знак $*$ – обозначает интервальное умножение из работы [69].

Теорема 2.1. Если уравнение (2.5) имеет единственное непрерывное решение для заданной непрерывной функции $u(t) \in C[0, T]$, удовлетворяющей условию (2.4). Тогда это решение может быть найдено методом простой итерации (последовательных приближений).

Доказательство. Метод простой итерации в применении к интегральному уравнению состоит в получении последовательности функций (приближений) $q_k(t)$, $k=0, 1, 2 \dots$ посредством рекуррентного соотношения

$$q_{k+1}(t) = q_0 + \int_0^t f(t, \tau, q_k(\tau)) d\tau + \int_0^t B(q_k(\tau)) u(\tau) d\tau, \quad (2.7)$$

$$t \in [0, T], k=1, 2 \dots$$

Обозначим

$$\varphi_0(t) = q_0;$$

$$\varphi_{k+1}(t) = q_0 + \int_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau + \int_0^t B(\varphi_k(\tau)) * v d\tau.$$

Тогда искомое решение можно представить в виде ряда

$$q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k, \quad (2.8)$$

который сходится, если $f(t)$ непрерывна на $[0, T]$ и $K(t, \tau)$ непрерывна на $0 \leq t, \tau \leq T$.

Обозначим $M = \sup_{0 \leq t, s \leq T} |K(t, s)|$, $N = \|q_0\|$. Можно оценить k -е приближение к искомому решению посредством выражения

$$|\varphi_k(t)| \leq NM^k T^k / k! \quad (2.9)$$

Из (2.9) следует факториальная сходимость метода последовательных приближений.

В качестве приближенного решения можно взять

$$q_r(t) = \sum_{k=0}^r \varphi_k(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.10)$$

точность которого оценивается следующим выражением

$$|q(t) - q_r(t)| = \left| \sum_{k=r+1}^{\infty} \varphi_k(t) \right| \leq \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{NM^k T^k}{k!} = N \{ \exp(MT) - \sum_{k=0}^r \frac{M^k T^k}{k!} \}$$

Отсюда следует равномерная и абсолютная сходимость ряда (2.8) при любом фиксированном управлении $u(t) \in U, t \in [0, T]$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Исследуемая система управляема, если вектор q_1 из правой части условия (2.4) принадлежит интервальному вектору $q_r(T)$.

Доказательство.

Перепишем приближенное решение (2.10) в момент времени T в виде следующего интервального интегрального выражения

$$q_r(T) = \sum_{k=0}^r \varphi_k(T), \quad (2.11)$$

$$\varphi_0(T) = q_0; \quad \varphi_{k+1}(T) = q_0 + \int_0^T f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau + \int_0^t B(\varphi_k(\tau)) * v d\tau.$$

где знак $*$ – обозначает интервальное умножение, $q_r(T)$ – интервальный граничный вектор в момент времени T и r выбирается из условия

$$N \left\{ \exp(MT) - \sum_{k=0}^r \frac{M^k T^k}{k!} \right\} \leq \varepsilon \quad (\varepsilon - \text{требуемая точность}).$$

Отсюда из принадлежности граничного вектора q_1 интервальному вектору $q_r(T)$ следует управляемость системы (2.1)-(2.4).

Тем самым следует справедливость утверждения теоремы.

2.3 Численные расчеты

Рассмотрим систему (2.1)-(2.4) при следующих условия. На управление даются ограничения

$$u(t) \in U = \{u(t): 0 \leq u(t) \leq 10.0, t \in [t_0, t_1]\} \quad (2.12)$$

В качестве начального состояния заданы координаты

$$q(0) = (0 \quad 0 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \quad (2.13)$$

В качестве конечного состояния заданы координаты

$$q(10) = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0). \quad (2.14)$$

Разработана программа на Matlab численного моделирования для вычисления критерия управляемости и выполнения арифметических операций с использованием интервалов. Кроме того, программное обеспечение повышает точность вычислений, учитывая неопределенности во входных данных и численные ошибки. Этот подход улучшает надежность анализа систем управления и облегчает более точное принятие решений в динамичных и неопределенных условиях.

Результаты численных расчетов (рисунки 6–11) показали, что исходную систему

$$\dot{q} = f(q) + B(q)u$$

можно перевести из начального состояния (2.13) в заданное конечное состояние (2.14) за время ($T = 10$ с), при соблюдении ограничений (2.12). Эти результаты подтвердили эффективность предложенного критерия управляемости, а также показали возможность достижения заданных целей в условиях реальных ограничений. Выводы, сделанные на основе проведенного моделирования, позволили сформулировать рекомендации для дальнейшего

развития методов управления полетами БПЛА, а также для их практического применения в различных сценариях.

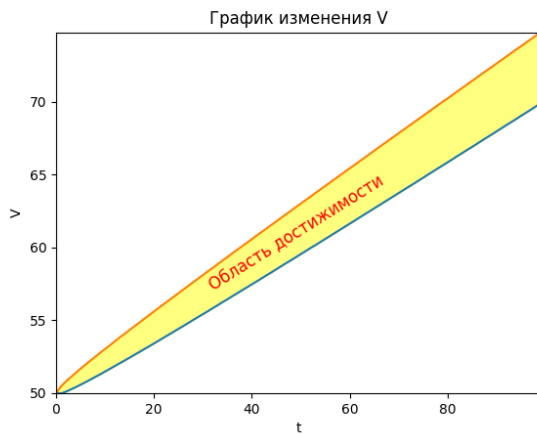


Рисунок 6. График по переменной V

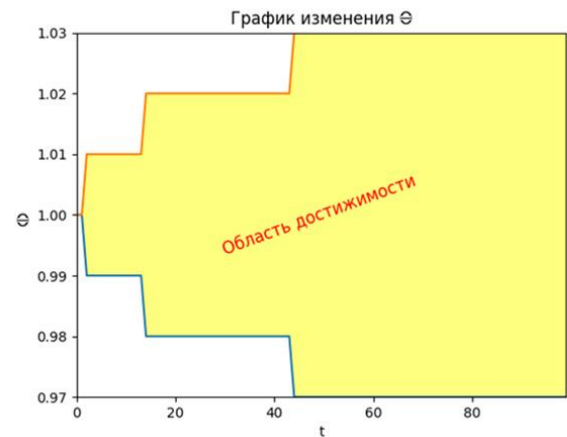


Рисунок 7. График по переменной Θ

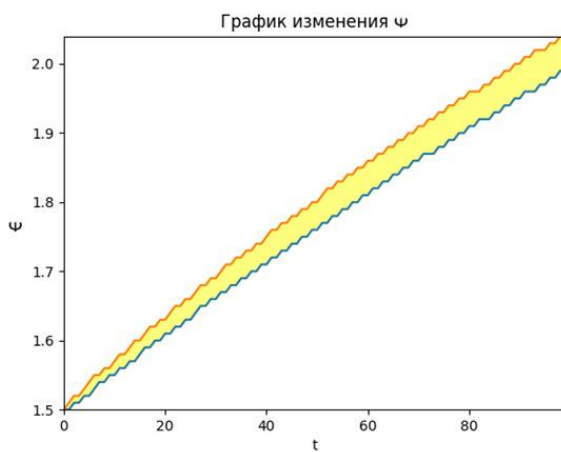


Рисунок 8. График по переменной ψ

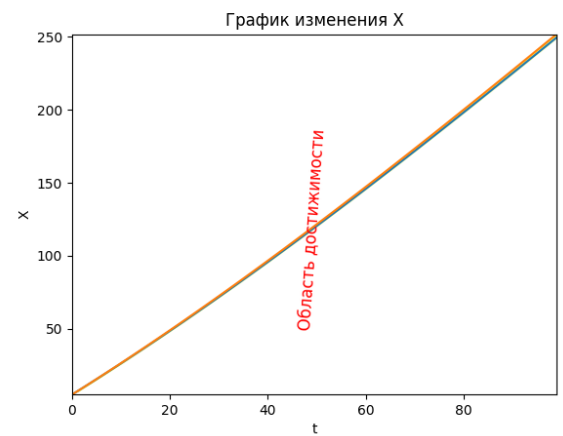


Рисунок 10. График по переменной u

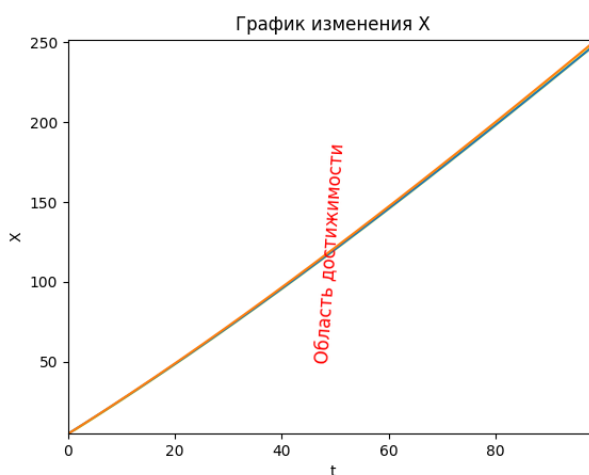


Рисунок 9. График по переменной x

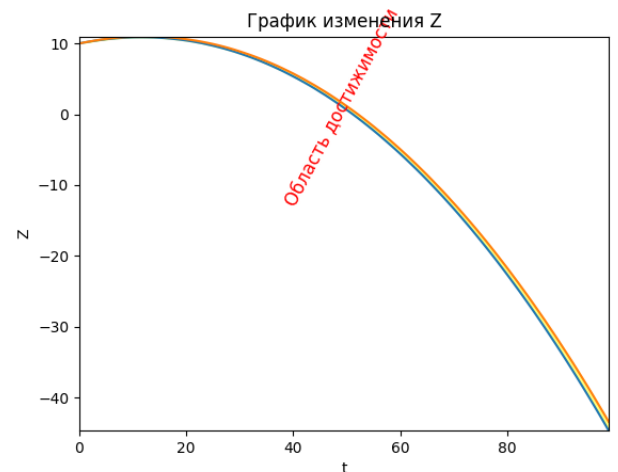


Рисунок 11. График по переменной z

Как видно из графиков скорость полета находится в пределах заданного интервала. Количество точек интегрирования равно 200. При заданном времени $T=10$.

2.4 Выводы по второму разделу

В этом разделе был сформулирован и доказан критерий управляемости для линейных систем. Полученный критерий дал нам возможность оценить управляемость системы и определил необходимые условия для ее управления и регулирования.

Также был сформулирован и доказан критерий управляемости нелинейных систем управления БПЛА. Это стало значительным шагом вперед в теории управления, поскольку управление нелинейными системами особенно важно и часто встречается в реальных приложениях.

Кроме того, проведенный анализ позволил выявить ключевые аспекты, влияющие на управляемость, такие как структура системы, динамические характеристики и внешние воздействия. В результате работы были предложены подходы к улучшению управляемости, которые могут быть применены в различных областях, включая авиацию и робототехнику. Эти результаты создают основу для дальнейших исследований и разработки более эффективных методов управления как линейными, так и нелинейными системами.

3 УСТОЙЧИВОСТЬ БПЛА

3.1 Литературный обзор по проблеме устойчивости

Исследование различных систем, таких как робототехнические и экономические, часто ведет к созданию и анализу их математических моделей, которые описываются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. До настоящего времени не существует универсальных подходов к анализу нелинейных систем. Построение и изучение таких математических моделей требует обязательного учета конкретных видов нелинейностей, которые присутствуют в системе [70-73].

В общем виде нелинейная модель может быть представлена как система обыкновенных дифференциальных уравнений [74,75]:

$$\frac{dq}{dt} = f(q, \theta) + B(q)u, \quad (3.1)$$

где θ – l -мерный вектор параметров, $q(t)$ – n -мерный вектор переменных модели, $u(t)$ – входы модели, задающие способы управления, время $t \in [0, T]$. T – задано. Предполагается, что вектор-функция $f(q, \theta)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными по q .

К системе уравнений (3.1) добавляются начальные условия:

$$q(0) = q_0. \quad (3.2)$$

На управление даются ограничения

$$u(t) \in U = \left\{ u(t): u_i(t) \in C[[0, T]; \right. \\ \left. 0 \leq u_i(t) \leq L, i = \overline{1, m}, t \in [0, T] \right\}. \quad (3.3)$$

При исследовании следующих свойств математической модели (3.1)-(3.3) как управляемость, устойчивость часто применяется метод линеаризации [76-80].

Нелинейной модели (3.1) соответствует линеаризованная система дифференциальных уравнений:

$$\dot{q} = A(\theta)q + Bu, \quad (3.4)$$

$$q(0) = q_0, \quad (3.5)$$

где $A(\theta)$ – $n \times n$ -матрица, элементы которой зависят от вектора параметров.

Матрица $A(\theta)$ определяется из (3.1) следующим образом:

$$A(\theta) = \frac{\partial f(q^s, \theta)}{\partial q} + B(q^s, \theta)K, \quad (3.6)$$

где K – постоянная $m \times n$ –матрица.

В (3.6) вектор-функция $q^s(t)$ (размерности n) $t \in [0, T]$, предполагается заданной исходя из требований к поставленной задаче.

Для задачи управляемости $q^s(t)$ может быть задана следующим образом:

$$q^s(t) = \text{const} = q_T, t \in [0, T]. \quad (3.7)$$

где в качестве q_T задается желаемое конечное состояние системы (3.1).

Ставится следующая задача управляемости: можно ли найти управление $u(t)$, которое соответствует условию (3.3) и позволяет системе (3.4) перейти из начального состояния (3.5) в заданное конечное состояние (3.7) за время T .

Так как λ_k – корни алгебраического характеристического уравнения, вытекающего из $\det(A(\theta) - \lambda_k E) = 0$ (E – единичная матрица), проблема устойчивости превращается косвенно в алгебраическую задачу, а именно при каком условии алгебраическое уравнение имеет корни с отрицательными вещественными частями и только такие корни. А.Гурвиц (1885 г.) решил эту задачу, установив таким образом косвенный критерий для устойчивости малых колебаний.

Определение устойчивости движения, предложенное Ляпуновым, лежит в основе современной теории устойчивости. Оно стало не только наиболее общим, но и определило объем и содержание проблем, рассматриваемых в этой теории. Кроме того, это определение стимулировало развитие качественных методов исследования дифференциальных уравнений для решения этих проблем.

Понятие устойчивости по Ляпунову формулируется следующим образом:

Определение (устойчивости по Ляпунову). Для системы $\frac{dy}{dt} = Y(y, t)$ движение $y=f(t)$ называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|y(t_0) - f(t_0)\| < \delta$ следует неравенство $\|y(t) - f(t)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$ [29].

А.М.Ляпунов предложил общие достаточные условия устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения, сводя вопрос устойчивости к устойчивости положения равновесия и наличию функции, названной функцией Ляпунова [29].

Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i(q_1, \dots, q_n), i = \overline{1, n}.$$

Теорема Ляпунова об устойчивости утверждает, что если для данной системы существует знакоопределенная функция V в определенной области, причем ее производная по времени $\dot{V}$ имеет постоянный знак, противоположный знаку самой функции, то положение равновесия будет устойчивым в смысле Ляпунова.

Метод функций Ляпунова, названный прямым методом Ляпунова Н.Г. Четаевым, является мощным аналитическим методом для анализа разнообразных динамических свойств нелинейных систем. Он нашел широкое применение в механике, физике, технике, теории управления и других областях. Однако основной трудностью при его применении было построение функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы.

Для преодоления этой трудности Н.Г. Четаев предложил метод векторных функций Ляпунова, который заключается в использовании нескольких функций Ляпунова. Этот метод оказался эффективным для сложных систем.

Принцип сравнения с векторной функцией Ляпунова, придуманный в методе Ляпунова, дал новый импульс этому методу. Разработка сотен теорем сравнения с векторной функцией Ляпунова для нелинейных дифференциальных уравнений является результатом этого принципа.

Метод сравнения с векторной функцией Ляпунова стал универсальным для анализа свойств разнообразных систем, независимо от их сложности и формы математического описания. Он также стал основополагающим при разработке алгоритмов вывода и доказательства теорем сравнения.

Определение [81]. Система (3.1) называется локально нуль-управляемой на отрезке $t \in [0, T]$, если существует δ -окрестность точки q_T , такая что для любого вектора $q_0 \in R^n$: $\|q_0 - q_T\| < \delta$ найдется такое допустимое управление $u_0(t) \in U$, что существует решение (3.1) удовлетворяющее условиям

$$q(0) = q_0 \text{ и } q(T) = q_T.$$

Для задачи устойчивости $q^s(t)$ может быть задана в виде (3.7), где в качестве q_T задается положение равновесия исходной системы (3.1), исследуемое на свойство ее устойчивости.

Рассмотрим следующую нелинейную систему

$$\frac{dq}{dt} = f(q, \theta) + B(q)u, \quad (3.8)$$

где функция $f(q_T, \theta) \equiv 0$, $A(\theta) = \frac{\partial f(q^s, \theta)}{\partial q} + B(q^s, \theta)K$, K – $m \times n$ -матрица параметров линейного управления.

«Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия q_T системы (3.8) считается экспоненциально устойчивым, в соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению» [82].

Построение вручную матрицы $A(\theta)$ вызывает большие трудности уже при размерности n больше 3. А в случае зависимости вектор-функции $f(q, \theta)$ от параметров θ при размерности n больше 3 практически невозможно.

Далее исследуется проблема устойчивости линеаризованной модели вида [82]:

$$\dot{q} = A(\theta)q, \quad (3.9)$$

где предполагается, что параметры, характеризующие механические свойства (например, вес, метрические характеристики, инерционность и т.д.), задаются через коэффициенты матрицы A . Также предполагается, что матрица A является интервальной, то есть ее элементы представляют собой интервальные числа.

3.2 Критерий устойчивости БПЛА

Процесс построения линеаризованной модели (3.4) для исходной нелинейной системы (3.1) оказывается трудоемким, особенно при увеличении размерности n , и практически нереализуемым при $n > 3$. В дополнение, при выполнении линеаризации модели часто встречается «человеческий фактор», который не обеспечивает гарантии правильности вычислений арифметических выражений. Поэтому возникает актуальная задача автоматизации процесса линеаризации нелинейной модели [83-87].

Для этой цели предлагается использовать системы компьютерной алгебры (САВ), такие как Matlab [88-90]. Системы компьютерной алгебры предоставляют широкий спектр процедур обработки алгебраических выражений, начиная с базовых операций вычисления и дифференцирования, и заканчивая более сложными операциями, такими как разложение в ряды и интегрирование. Они находят применение в различных областях, включая аэрокосмическую промышленность [91-97].

Для системы (3.9), когда элементы матрицы A – «точечные» числа, разработаны критерии устойчивости, выражающиеся через элементы матрицы A , такие как критерий Рауса-Гурвица и другие [98]. Однако, эти критерии не учитывают факт того, что физические параметры измеряются с определенной погрешностью. Исследователи часто, делая вывод об устойчивости системы (3.11), забывают, что коэффициенты и корни характеристического полинома могут быть очень чувствительны к малым погрешностям матричных элементов.

Интервальный анализ дает возможность автоматически учитывать погрешности в задании исходных данных и погрешности, вызываемые машинным округлением.

При исследовании устойчивости динамики механических систем интервальный анализ позволяет получить критерий гарантированной устойчивости.

Введем обозначение: $\tilde{A} = \{\tilde{a}_{ij}\}$ – точечная матрица, при этом $\tilde{a}_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$, где $\mathbf{a}_{ij}$ – элементы интервальной матрицы A .

Известно, что для определения устойчивости интервальной матрицы A достаточно определения устойчивости точечных матриц, составленных из различных комбинаций верхних и нижних границ элементов исходной

интервальной матрицы. Однако такой подход не является конструктивным, так как уже при $n=3$ приходится определять устойчивость 512 точечных матриц и при $n=4$, соответственно, 65536 точечных матриц.

Определение 3.1. Интервально асимптотическая устойчивость по Ляпунову для системы (3.11) с интервальной матрицей A , где элементы имеют нормальное распределение, определяется как условие, при котором для любого интервального решения

$$q(t) = [\bar{q}(t) - \varepsilon_q(t), \bar{q}(t) + \varepsilon_q(t)] = \{\bar{q}(t), \varepsilon_q(t)\}, t \in [0, \infty)$$

справедливо утверждение:

1) для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in [0, \infty)$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ такое, что для всех решений $q = q(t)$, удовлетворяющих условию $\|q(t_0)\| < \delta$, справедливо неравенство $\|q(t)\| < \varepsilon$, при $t_0 \in [0, \infty)$;

2) для любого $t_0 \in [0, \infty)$ существует $\lambda = \lambda(t_0)$ такое, что все решения $q = q(t)$, удовлетворяющие условию $\|q(t_0)\| < \lambda$, обладают свойством:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{q}(t)\| = 0.$$

Определение 3.2. Интервально асимптотическая устойчивость по Ляпунову по части переменных ($k \leq n$) для системы (3.11) с интервальной матрицей A определяется как условие, при котором для любого интервального решения

$$q(t) = [\bar{q}(t) - \varepsilon_q(t), \bar{q}(t) + \varepsilon_q(t)] = \{\bar{q}(t), \varepsilon_q(t)\}, t \in [0, \infty)$$

справедливо утверждение:

1) для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in [0, \infty)$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ такое, что для всех решений $q = q(t)$, удовлетворяющих условию $\|q(t_0)\| < \delta$, справедливо неравенство $\|q(t)\|_k < \varepsilon$, при $t_0 \in [0, \infty)$;

2) для любого $t_0 \in [0, \infty)$ существует $\lambda = \lambda(t_0)$ такое, что все решения $q = q(t)$, удовлетворяющие условию $\|q(t_0)\| < \lambda$, обладают свойством:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{q}(t)\|_k = 0.$$

Здесь под нормой $\|a\|_k$ понимается

$$\|a\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2}$$

Рассмотрим следующую математическую модель динамики БПЛА (1.1)-(1.4).

С помощью программы, написанной на Matlab и представленной ниже, получим следующие результаты линеаризации системы (1.1).

Для уменьшения громоздкости выкладок примем, что управления u_x и u_y зависят от первых трех переменных q_1, q_2, q_3 . И в дальнейшем исследуем устойчивость по первым трем переменным.

Примечание. Все рассуждения остаются справедливыми, если принять $k = n$ (т.е. исследовать на устойчивость по всем переменным). Для этого необходимо управления выбрать в виде $u_x = \sum_{i=1}^n k_{1i} * q_i$ и $u_y = \sum_{i=1}^n k_{2i} * q_i$.

```
syms q1 q2 q3 q4 q5 q6 q A B gamma
syms k1 k2 k3 k4 k5 k6
q0 = [2.2 1.5 1.4 1.3 1.1 1.0];
q = [q1 q2 q3 q4 q5 q6];
nxa=k1*q1+k2*q2+ k3*q3
nya=k4*q1+k5*q2+ k6*q3
F = [g*(nxa-sin(q2)); g*(nya*cos(gamma)-cos(q2))/q1; -
g*nya*sin(gamma)/(q1*cos(q2)); q1*cos(q2)*cos(q3); q1*sin(q2); -
q1*cos(q2)*sin(q3)];
for i=1:length(q0)
    for j=1:length(q0)
        A(i,j)=diff(F(i),q(j));
    end
end
disp(vpa(A,3));
B=subs(A,q,q0); B=subs(B,g,9.8); B=subs(B,gamma,45);
disp(vpa(B,3));
```

Представим результат выполнения программы в следующем виде:

$$A(q) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{61} & a_{62} & \dots & a_{66} \end{pmatrix}$$

Выпишем только ненулевые элементы матрицы $A(q)$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 9.8 * k1; \quad a_{12} = 9.8 * k2 - 9.8 * \cos(q2); \quad a_{13} = 9.8 * k3; \\ a_{21} &= (5.14816 * k4)/q1 - (1.0 * (5.14816 * k4 * q1 - 9.8 * \cos(q2) \\ &\quad + 5.14816 * k5 * q2 + 5.14816 * k6 * q3))/q1^2; \\ a_{22} &= (5.14816 * k5 + 9.8 * \sin(q2))/q1; \\ a_{23} &= (5.14816 * k6)/q1; \\ a_{31} &= (8.33885 * k4 * q1 + 8.33885 * k5 * q2 + 8.33885 * k6 * q3)/(q1^2 \\ &\quad * \cos(q2)) - (8.33885 * k4)/(q1 * \cos(q2)); \end{aligned}$$

$$a_{32} = (8.33885 * k5)/(q1 * \cos(q2)) - (1.0 * \sin(q2) * (8.33885 * k4 * q1 + 8.33885 * k5 * q2 + 8.33885 * k6 * q3))/(q1 * \cos(q2)^2);$$

$$a_{33} = -(8.33885 * k6)/(q1 * \cos(q2));$$

$$a_{41} = \cos(q2) * \cos(q3)$$

$$a_{42} = -1.0 * q1 * \cos(q3) * \sin(q2)$$

$$a_{43} = -1.0 * q1 * \cos(q2) * \sin(q3),$$

$$a_{51} = \sin(q2)$$

$$a_{52} = q1 * \cos(q2)$$

$$a_{61} = -1.0 * \cos(q2) * \sin(q3)$$

$$a_{62} = q1 * \sin(q2) * \sin(q3)$$

$$a_{63} = -1.0 * q1 * \cos(q2) * \cos(q3)$$

После подстановки координат конечной точки, ускорения свободного падения и угла крена в матрицу A получим следующие численные значения

$$\begin{bmatrix} 9.8*k1, & 9.8*k2 - 0.693225, & 9.8*k3, 0, 0, 0 \\ 0.143228 - 1.48914*k6 - 1.5955*k5, & 2.34007*k5 + 4.44339, & 2.34007*k6, 0, 0, 0 \\ [36.5346*k5 - 9.09495e-13*k4 + 34.099*k6, - 1662.35*k4 - 1187.0*k5 - 1057.86*k6, -53.5841*k6, 0, 0, 0] \\ 0.012023, & -0.372991, & -0.153358, 0, 0, 0 \\ 0.997495, & 0.155622, & 0, 0, 0, 0 \\ -0.069708, & 2.16256, & -0.0264506, 0, 0, 0 \end{bmatrix}$$

Представим матрицу в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

В дальнейшем матрица A , представленная в виде (3.10), может быть использована для анализа устойчивости или управляемости модели БПЛА в заданной точке.

Как видно из структуры матрицы, устойчивость по всем переменным не всегда может быть обеспечена. Поэтому в дальнейшем мы исследуем динамическую модель БПЛА на устойчивость по части переменных (первым трем переменным).

Как известно, для определения устойчивости точечной матрицы анализируются свойства ее собственных значений [99]. Аналогично, для определения устойчивости интервальной матрицы строится характеристический полином с интервальными коэффициентами:

$$\varphi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A_1) = p_k \lambda^k + p_{k-1} \lambda^{k-1} + p_1 \lambda + p_0, \quad (3.12)$$

где $p_i, i = \overline{0, k}$ – интервальные числа.

Необходимое условие устойчивости: все коэффициенты характеристического полинома (3.12) должны находиться в положительной области и не содержать 0: т.е. для $p_i = [\bar{p}_i - \varepsilon_i^p, \bar{p}_i + \varepsilon_i^p], i = \overline{0, k}$ должно выполняться $0 \notin p_i, \bar{p}_i - \varepsilon_i^p > 0, i = \overline{0, k}$.

Составим матрицу Гурвица

$$M = \begin{bmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{2k-1} & p_{2k-2} & p_{2k-3} & p_{2k-4} & \dots & p_k \end{bmatrix},$$

где принято $p_j = 0$ при $j < 0$ и $j > k$.

Обозначим через $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ главные диагональные миноры матрицы M :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= p_1, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} p_1 & p_0 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}, \\ &\dots \\ \Delta_k &= |M| = p_k \Delta_{k-1}, \end{aligned}$$

которые в свою очередь являются интервальными числами.

Критерий интервальной устойчивости Гурвица: для того чтобы $\text{Re} \lambda_j(A) < 0, j = \overline{1, k}$ необходимо и достаточно, чтобы главные диагональные миноры $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ матрицы M находились в правой полуплоскости, т.е. $\Delta_j \in (0, \infty), j = \overline{1, k}$.

Для характеристического уравнения

$$a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0$$

составим таблицу Рауса (матрица размерности $(k+1)*m$, где $m = [k/2] + 2$)

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} = a_0 & c_{12} = a_2 & \dots \\ c_{21} = a_1 & c_{22} = a_3 & \dots \\ c_{31} & c_{32} & \dots \\ c_{41} & c_{42} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

в первую строку записываются коэффициенты исходного характеристического уравнения с четными индексами, во вторую – с нечетными. Элементы остальных строк рекуррентно вычисляются по формуле

$$c_{1l} = \begin{cases} a_{2(l-1)}, & \text{если } 2(l-1) \leq k; \\ 0, & \text{если } 2(l-1) > k \end{cases};$$

$$c_{2l} = \begin{cases} a_{2(l-1)}, & \text{если } 2l-1 \leq k; \\ 0, & \text{если } 2l-1 > k \end{cases};$$

$$c_{il} = c_{i-2,l+1} - d_i c_{i-1,l+1};$$

$$d_i = c_{i-2,1}/c_{i-1,1}; i = \overline{3, l}; l = \overline{1, k}.$$

Критерий интервальной устойчивости Рауса: для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца матрицы C находились в правой полуплоскости, т.е.

$$c_{1j} \in (0, \infty), j = \overline{1, k}.$$

Для автоматизированного построения интервального характеристического полинома реализованы алгоритмы Крылова, Леверье [100], основанные как на классической, так и введенной интервальной математике.

3.3. Численные расчеты

Вышеперечисленные критерии интервальной устойчивости также реализованы в разработанном пакете интервальных вычислений.

Возможность применения пакета программ демонстрируется на следующем примере.

Для матрицы A_1 из (3.10) построим характеристический полином

$$\lambda^3 + p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda + p_3 \quad (3.13)$$

где

$$p_1 = (9.8 * k1 + 2.34 * k5 - 53.58 * k6 + 4.443)(9.8 * k1 + 2.34 * k5 - 53.58 * k6 + 4.443)$$

$$p_2 = ((2.34 * k5 + 4.443) * (9.8 * k1 + 2.34 * k5 - 53.58 * k6 + 4.443) - 2.0 * (9.8 * k2 - 0.6932) * (1.596 * k5 + 1.489 * k6 - 0.1432) + 19.6 * k3 * (36.53 * k5 - 9.095e - 13 * k4 + 34.1 * k6) - 4.68 * k6 * (1662.0 * k4 + 1187.0 * k5 + 1058.0 * k6) + 9.8 * k1 * (9.8 * k1 + 2.34 * k5 - 53.58 * k6 + 4.443) - 53.58 * k6 * (9.8 * k1 + 2.34 * k5 - 53.58 * k6 + 4.443))$$

$$\begin{aligned}
p_3 = & ((9.8 * k_3 * (36.53 * k_5 - 9.095e - 13 * k_4 + 34.1 * k_6) - 1.0 \\
& * (9.8 * k_2 - 0.6932) * (1.596 * k_5 + 1.489 * k_6 \\
& - 0.1432) + 9.8 * k_1 * (9.8 * k_1 + 2.34 * k_5 - 53.58 * k_6 \\
& + 4.443)) * (0.5 * (2.34 * k_5 + 4.443) * (9.8 * k_1 + 2.34 \\
& * k_5 - 53.58 * k_6 + 4.443) - 1.0 * (9.8 * k_2 - 0.6932) \\
& * (1.596 * k_5 + 1.489 * k_6 - 0.1432) + 9.8 * k_3 * (36.53 \\
& * k_5 - 9.095e - 13 * k_4 + 34.1 * k_6) - 2.34 * k_6 \\
& * (1662.0 * k_4 + 1187.0 * k_5 + 1058.0 * k_6) + 4.9 * k_1 \\
& * (9.8 * k_1 + 2.34 * k_5 - 53.58 * k_6 + 4.443) - 26.79 \\
& * k_6 * (9.8 * k_1 + 2.34 * k_5 - 53.58 * k_6 + 4.443)) + 2.0 \\
& * (53.58 * k_6 * (1662.0 * k_4 + 1187.0 * k_5 + 1058.0 * k_6) \\
& - 1.0 * (1662.0 * k_4 + 1187.0 * k_5 + 1058.0 * k_6) * (9.8 \\
& * k_1 + 2.34 * k_5 - 53.58 * k_6 + 4.443) + (9.8 * k_2 \\
& - 0.6932) * (36.53 * k_5 - 9.095e - 13 * k_4 + 34.1 * k_6)) \\
& * (2.34 * k_6 * (2.34 * k_5 + 4.443) - 9.8 * k_3 * (1.596 * k_5 \\
& + 1.489 * k_6 - 0.1432) + 2.34 * k_6 * (9.8 * k_1 + 2.34 \\
& * k_5 - 53.58 * k_6 + 4.443)) - 1.0 * (1.0 * (9.8 * k_2 \\
& - 0.6932) * (1.596 * k_5 + 1.489 * k_6 - 0.1432) - 1.0 \\
& * (2.34 * k_5 + 4.443) * (9.8 * k_1 + 2.34 * k_5 - 53.58 * k_6 \\
& + 4.443) + 2.34 * k_6 * (1662.0 * k_4 + 1187.0 * k_5 \\
& + 1058.0 * k_6)) * (0.5 * (2.34 * k_5 + 4.443) * (9.8 * k_1 \\
& + 2.34 * k_5 - 53.58 * k_6 + 4.443) - 1.0 * (9.8 * k_2 \\
& - 0.6932) * (1.596 * k_5 + 1.489 * k_6 - 0.1432) + 9.8 \\
& * k_3 * (36.53 * k_5 - 9.095e - 13 * k_4 + 34.1 * k_6) - 2.34 \\
& * k_6 * (1662.0 * k_4 + 1187.0 * k_5 + 1058.0 * k_6) + 4.9 \\
& * k_1 * (9.8 * k_1 + 2.34 * k_5 - 53.58 * k_6 + 4.443) \\
& - 26.79 * k_6 * (9.8 * k_1 + 2.34 * k_5 - 53.58 * k_6 \\
& + 4.443)) - 1.0 * (2.34 * k_6 * (1662.0 * k_4 + 1187.0 * k_5 \\
& + 1058.0 * k_6) - 9.8 * k_3 * (36.53 * k_5 - 9.095e - 13 \\
& * k_4 + 34.1 * k_6) + 53.58 * k_6 * (9.8 * k_1 + 2.34 * k_5 \\
& - 53.58 * k_6 + 4.443)) * (0.5 * (2.34 * k_5 + 4.443) * (9.8 \\
& * k_1 + 2.34 * k_5 - 53.58 * k_6 + 4.443) - 1.0 * (9.8 * k_2 \\
& - 0.6932) * (1.596 * k_5 + 1.489 * k_6 - 0.1432) + 9.8 \\
& * k_3 * (36.53 * k_5 - 9.095e - 13 * k_4 + 34.1 * k_6) - 2.34 \\
& * k_6 * (1662.0 * k_4 + 1187.0 * k_5 + 1058.0 * k_6) + 4.9 \\
& * k_1 * (9.8 * k_1 + 2.34 * k_5 - 53.58 * k_6 + 4.443) \\
& - 26.79 * k_6 * (9.8 * k_1 + 2.34 * k_5 - 53.58 * k_6 \\
& + 4.443)) + 2.0 * ((1.596 * k_5 + 1.489 * k_6 - 0.1432) \\
& * (1662.0 * k_4 + 1187.0 * k_5 + 1058.0 * k_6) - 53.58 * k_6 \\
& * (36.53 * k_5 - 9.095e - 13 * k_4 + 34.1 * k_6) + (36.53 \\
& * k_5 - 9.095e - 13 * k_4 + 34.1 * k_6) * (9.8 * k_1 + 2.34 \\
& * k_5 - 53.58 * k_6 + 4.443)) * (96.04 * k_1 * k_3 + 2.34 * k_6 \\
& * (9.8 * k_2 - 0.6932) + 9.8 * k_3 * (9.8 * k_1 + 2.34 * k_5 \\
& - 53.58 * k_6 + 4.443)) - 2.0 * (1.0 * (2.34 * k_5 + 4.443)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * (1.596 * k_5 + 1.489 * k_6 - 0.1432) - 2.34 * k_6 * (36.53 \\
& * k_5 - 9.095e - 13 * k_4 + 34.1 * k_6) + 1.0 * (1.596 * k_5 \\
& + 1.489 * k_6 - 0.1432) * (9.8 * k_1 + 2.34 * k_5 - 53.58 \\
& * k_6 + 4.443)) * ((9.8 * k_2 - 0.6932) * (9.8 * k_1 + 2.34 \\
& * k_5 - 53.58 * k_6 + 4.443) - 9.8 * k_3 * (1662.0 * k_4 \\
& + 1187.0 * k_5 + 1058.0 * k_6) + 9.8 * k_1 * (9.8 * k_2 \\
& - 0.6932)))
\end{aligned}$$

Определители главных миноров матрицы Рауса-Гурвица, вычисленной из полинома (3.13) для фиксированных констант $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ выводятся в файл DanBPL.txt и ниже представлены.

Isx stroka

1

$$[-0.050, 0.050] = (0.000, 0.050)$$

$$[0.021, 0.121] = (0.071, 0.050)$$

$$[-0.050, 0.050] = (0.000, 0.050)$$

2

$$[-0.001, 0.099] = (0.049, 0.050)$$

$$[0.781, 0.881] = (0.831, 0.050)$$

$$[-0.050, 0.050] = (0.000, 0.050)$$

3

$$[-0.050, 0.050] = (0.000, 0.050)$$

$$[-0.050, 0.050] = (0.000, 0.050)$$

$$[-0.050, 0.050] = (0.000, 0.050)$$

4

$$[-0.062, 0.038] = (-0.012, 0.050)$$

$$[-0.253, -0.153] = (-0.203, 0.050)$$

$$[-0.134, -0.034] = (-0.084, 0.050)$$

5

$$[0.947, 1.047] = (0.997, 0.050)$$

$$[0.035, 0.135] = (0.085, 0.050)$$

$$[-0.050, 0.050] = (0.000, 0.050)$$

6

$$[-0.120, -0.020] = (-0.070, 0.050)$$

$$[1.129, 1.229] = (1.179, 0.050)$$

$$[-0.064, 0.036] = (-0.014, 0.050)$$

XarKoeff

Metod Fadeeva

$$0 [1.000, 1.000] = (1.000, 0.000)$$

$$1 [-0.953, -0.709] = (-0.831, 0.122)$$

$$2 [-0.094, 0.087] = (-0.003, 0.091)$$

$$3 [-0.053, 0.053] = (-0.000, 0.053)$$

Raus_Gurv

$$0 = [1.000000, 1.000000] = (1.000000, 0.000000)$$

$$1 = [0.953474, -0.708526] = (-0.083100, 0.122474)$$

$$2 = [-0.072563, 0.078346] = (0.002891, 0.075455)$$

$$3 = [0.000000, 0.000000] = (0.000000, 0.000000)$$

XarKoeff

Metod Leverie

$$0 [1.000, 1.000] = (1.000, 0.000)$$

$$1 [0.953, -0.709] = (-0.083, 0.122)$$

$$2 [-0.099, 0.092] = (-0.003, 0.095)$$

$$3 [-0.063, 0.063] = (-0.000, 0.063)$$

Raus_Gurv

$$0 = [1.000000, 1.000000] = (1.000000, 0.000000)$$

$$1 = [0.953474, -0.708526] = (-0.083100, 0.122474)$$

$$2 = [-0.076415, 0.082197] = (0.002891, 0.079306)$$

$$3 = [-0.000182, 0.000182] = (-0.000000, 0.000182)$$

При использовании разработанного программного обеспечения, реализующего введенные интервальные арифметические операции, для интервальной матрицы (3.6) получены следующие результаты:

методом Фадеева

$$p = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1.000, 1.000] \\ [-0.953, -0.709] \\ [-0.094, 0.087] \\ [-0.053, 0.053] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1.000, 0.000) \\ (-0.831, 0.122) \\ (-0.003, 0.091) \\ (-0.000, 0.053) \end{pmatrix}$$

методом Леверье

$$p = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1.000, 1.000] \\ [-0.953, -0.709] \\ [-0.099, 0.092] \\ [-0.063, 0.063] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1.000, 0.000) \\ (-0.831, 0.122) \\ (-0.003, 0.095) \\ (-0.000, 0.063) \end{pmatrix}$$

Из анализа численных примеров следует, что алгоритмы Фадеева и Леверье минимизируют разброс коэффициентов характеристического полинома. Интересно, что средние значения коэффициентов характеристического полинома «точечной» матрицы совпадают с серединами интервалов исходной интервальной матрицы. Это важное свойство не наблюдается при использовании классической интервальной арифметики или полного перебора всех точечных матриц.

3.4 Выводы по третьему разделу

На основе использования Matlab была разработана автоматизированная система линеаризации. Результаты, полученные этой системой, были переданы в специализированную программу, что позволило проводить более

точные вычисления и детальный анализ поведения системы в различных условиях.

Эта интеграция обеспечила высокий уровень надежности и точности полученных данных, что, в свою очередь, способствовало более глубокому пониманию динамики изучаемых процессов. Кроме того, система облегчила корректировку в реальном времени, оптимизацию параметров управления и выявление критических факторов стабильности. Благодаря использованию передовых вычислительных инструментов исследователи смогли усовершенствовать прогностические модели, повысить производительность системы и улучшить принятие решений в сложных динамических средах.

4 ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БПЛА

4.1 Литературный обзор по проблеме оптимального управления

Введем обозначение

$$q = (q_1, \dots, q_n), u = (u_1, u_2, \dots, u_m),$$

где q – вектор состояния ($n \times 1$), u – вектор управления ($m \times 1$), T – время для управления (выбираем фиксированным), $A(t)$ – n -мерная квадратная матрица, элементы которой непрерывные функции, B – $n \times m$ матрица, значения которой константы.

Управления выбирается из множества U :

$$\begin{aligned} U &= \{u \mid u \in R^m, 0 \leq u_i \leq 1, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m u_i = 1\}, \\ U_1 &= \{u \mid u \in R^m, 0 \leq u_i \leq 1, i = \overline{1, m}\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

При введенных обозначениях перепишем систему уравнений в следующем виде

$$\dot{q} = f(q, t) + B(q)u, \quad (4.2)$$

$$q(0) = q^0. \quad (4.3)$$

Обозначим через

$$q(T) = q^T \quad (4.4)$$

желаемое конечное состояние в момент времени T .

Пусть задан следующий функционал $J(u)$:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T (u^* R u) dt, \quad (4.5)$$

где $R > 0$ – положительно-определенная $m \times m$ – матрица.

Пусть u_1^* – точка минимума на множестве U_1 , u_2^* – точка минимума на множестве U :

$$u_1^* \in \operatorname{Arg} \min_{u \in U_1} J(u), \quad u_2^* \in \operatorname{Arg} \min_{u \in U} J(u).$$

Пусть u_p – получено из u_1^* , так чтобы выполняется условие

$$\sum_{i=1}^n u_{pi} = 1. \quad (4.6)$$

Это может быть проекция точки u_1^* на границу Γ множества U или масштабирование, так чтобы выполнялось условие (4.6).

Обозначим $J_1 = J(u_1^*), J_2 = J(u_2^*), J_3 = J(u_p)$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. $J_1 \leq J_2$.

Доказательство основано на следующем свойстве множеств $U \in U_1$.

Утверждение 2. $u_p \in U$. Скорее всего даже $u_p \in \Gamma$.

Утверждение 3. $J_3 \geq J_1$. Более того $J_3 \geq J_2$.

Доказательство основано на следующих очевидных выкладках:

$$J_2 = \min_{u \in U} J(u) \leq \min_{u \in \Gamma} J(u) \leq J_3.$$

Утверждение 4. Не факт, что справедливо $J_3 = J_2$.

Доказательство. Это зависит от свойств функционала $J(u)$.

Утверждение 5. Не очевидно, что справедливо $u_p = u_2^*$.

Доказательство. Следствие утверждений 2-4.

Ставится следующая задача: определить управление $u \in U$ и траекторию q , минимизирующие функционал (4.5) переводящие систему (4.2) из начального состояния (4.3) в заданное конечное состояние (4.4) в момент времени T .

Разработка вычислительного алгоритма

Для задачи (4.1)-(4.6) составим функцию Гамильтона.

$$H = (f(q, t) + B(q)u)^* \psi - \frac{1}{2} (u^* R u) \quad (4.7)$$

Управление найдем из условия максимума Гамильтониана (4.7)

$$u = P_U(R^{-1}B\psi), \quad (4.8)$$

где P_U – оператор проектирования на множество U .

Пусть дана произвольная точка плоскости $u_0 \in R^n$.

Определение 4.1. Точка u_p называется проекцией точки u_0 на множество U , если выполняется условие

$$u_p \in \text{Arg} \min_{u \in U} \sqrt{(u - u_0)^2}.$$

Определение 4.2. Проекцией точки u_0 на множество U называется ближайшая к ней точка, принадлежащая к множеству U .

Нахождение оптимальной траектории сведено к решению следующей краевой задачи

$$\begin{aligned}\dot{q} &= f(q, t) + BP_U(R^{-1}B\psi), \\ \dot{\psi} &= -\left(\frac{\partial}{\partial q}f(q, t) + \left(\frac{\partial}{\partial q}B(q)\right)BP_U(R^{-1}B\psi)\right)\psi, \\ q(0) &= q^0, \\ q(T) &= q^T\end{aligned}\quad (4.9)$$

Оптимальное управление вычисляется по формуле (4.8).

Как известно решение краевой задачи имеет ряд вычислительных трудностей. В этой связи сведем задачу оптимального управления с закрепленными концами к задаче со свободным правым концом

Для этого введем систему функционалов

$$J_k(u) = \frac{1}{2} \int_0^T (u^* R u) dt + \frac{1}{2} (q(T) - q^T)^* F_k (q(T) - q^T) \quad (4.10)$$

В функционалах J_k матрица F_k является матрицей с элементами θ_k на диагонали, где θ_k образуют возрастающую последовательность, стремящуюся к бесконечности.

Мы можем сформулировать новую задачу, т.е. определить оптимальное управление для минимизации функционала J_k вида (4.10) с ограничениями вида (4.1)-(4.4) для заданного k . Эта задача представляет собой задачу оптимального управления с фиксированным конечным состоянием и ограничениями на управление. Для ее решения мы формулируем функцию Гамильтона следующим образом:

$$H_k = (f(q_k, t) + B(q_k) u_k)^* \psi_k - \frac{1}{2} (u_k^* R u_k)$$

Принимая это во внимание, для этой задачи предлагается следующий алгоритм решения.

1-ый шаг. Вначале пусть $k = 1$, $\varepsilon > 0$ – требуемая точность вычисления.

2-ой шаг. Пусть $i=0$; задается начальное (нулевое) приближение для управления $u_{k0} \in U$

3-ий шаг. $i=i+1$; вычисляется i -е приближение для исходной системы

$$\begin{aligned}\dot{q}_{ki} &= f(q_{ki}, t) + B(q_{ki})u_{i-1} \\ q_{ki}(0) &= q^0\end{aligned}$$

В результате определяется

$$q_{ki}(t), t \in [0, T]$$

4-ый шаг. Решается сопряженная система в обратном направлении

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_{ki} &= -\left(\frac{\partial}{\partial q} f(q_{ki}, t) + \frac{\partial}{\partial q} B(q_{ki}) u_{ki}\right) \psi_{ki} \\ \psi_{ki}(T) &= -F_k(q_{ki}(T) - q^T)\end{aligned}$$

В результате определяется $\psi_{ki}(t), t \in [0, T]$

5-ый шаг. Вычисляется очередное приближение u_{ki} для управления u_k

$$u_{ki} = P_U(R^{-1}B\psi_{ki}).$$

6-ой шаг. Вычисляется разница между $\delta = |u_{ki} - u_{k,i-1}|$. Если $\delta \leq \varepsilon$ то переходим к 7-ому шагу, иначе возвращаемся к 3-му шагу.

7-ой шаг. После проведения расчетов для k -й итерации найдем оптимальное управление

$$u_k^* = u_{ki}$$

и оптимальную траекторию

$$q_k^* = q_{ki}$$

8-ой шаг. При найденных траектории q_k и управлении u_k вычисляется значение функционала J_k .

9-ый шаг. Если $|J_k - J_{k-1}| \leq \varepsilon$, то переходим к 10-му шагу, иначе переходим на следующую итерацию, т.е. $k = k + 1$, $i=0$, $u_{k0} = u_{k-1}^*$ и возвращаемся к 3-му шагу.

10-ый шаг. Найденная пара траектории и управления (q_k^*, u_k^*) является оптимальным решением.

4.2 Определение оптимального управления

Рассмотрим квадратичный критерий, который предоставляет количественную меру эффективности системы и минимизируя его мы сможем повысить общую производительность и адаптивность системы в различных условиях эксплуатации.

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [u^*(t) R_0 u(t)] dt \quad (4.11)$$

где R_0 – это положительно определенная $m \times m$ -матрица.

Этот критерий позволяет оценивать стабильность, точность и эффективность системы, количественно оценивая отклонения от заданного состояния. Минимизируя этот функционал, можно определить оптимальные стратегии управления для повышения реактивности и надежности системы в различных условиях работы. Более того, этот подход способствует

адаптивным корректировкам, обеспечивая улучшение производительности, надежности и устойчивости в динамичных условиях.

Желаемое состояние в момент времени T может быть описано либо как фиксированное условие вида (4.4), либо как гибкое ограничение вида:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} q_j(T) \leq d_i, i = \overline{1, k} \quad (4.12)$$

Таким образом, задача формулируется как задача оптимального управления с ограничениями на управление вида (4.1), где терминальные условия могут быть либо фиксированными (4.4), либо гибкими (4.12). Такой подход позволяет сформулировать задачу в более общем виде, учитывая вариации в ограничениях на конечное состояние и обеспечивая более адаптивный процесс оптимизации.

На сегодняшний день решение подобных задач вызывает определенные математические сложности. Поэтому рассмотрим различные постановки задач оптимального управления.

1. Задача оптимального управления с зафиксированным правым концом и зафиксированным временем.

Исследуется задача минимизации функционала вида (4.11) при ограничениях вида (4.1)-(4.4). Момент времени T считается зафиксированным.

Для данной задачи оптимального управления составлена функция Гамильтона.

$$H(q(t), u, \psi(t), \psi_0) = -\frac{1}{2} u^*(t) R_0 u(t) + (f(q, t) + B(q)u(t))^* \psi. \quad (4.13)$$

Составим сопряженную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\left(\frac{\partial}{\partial q} f(q, t) + \frac{\partial}{\partial q} B(q)u_{ki}\right)^* \psi(t), t \in [t_0, T]. \quad (4.14)$$

Определим оптимальное управление из условия максимума гамильтониана:

$$u = \begin{cases} 0, & \text{если } R_0^{-1} B \psi < 0 \\ R_0^{-1} B \psi, & \text{если } 0 \leq R_0^{-1} B \psi \leq u_{\max} \\ u_{\max}, & \text{если } R_0^{-1} B \psi > u_{\max} \end{cases} \quad (4.15)$$

Теорема 4.1. Пусть пара $(u(t), q(t)), t \in [t_0, T]$ – является решением поставленной выше задачи. Тогда необходимо существует вектор-функция $\psi(t), t \in [t_0, T]$ и параметр ψ_0 такие, что

1) $\psi_0 \leq 0, |\psi_0| + |\psi(t)| \neq 0, t \in [t_0, T]$

2) при этом $q(t), \psi(t), t \in [t_0, T]$ – решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (4.2) и соответствующей сопряженной

системы дифференциальных уравнений (4.14) при краевых условиях (4.3) и (4.4) и управлении (4.15).

Доказательство: Так как для сформулированной задачи оптимального управления выполнены все условия принципа максимума Понтрягина, то отсюда следует справедливость теоремы.

2. Численный алгоритм решения задачи оптимального управления с закрепленными концами.

Исследуем проблему нахождения оптимального управления с ограничениями на управление вида (4.1) и фиксированными концами вида (4.2)-(4.4). На текущий момент решение таких вопросов порождают определенные математические затруднения. Для того, чтобы решить эту проблему для задачи оптимального управления можно применить метод штрафных функций и градиентный метод.

К тому же, необходимо учесть ограничения, которые были введены на конец траектории (4.4). Для решения этой проблемы введем функцию штрафа вида $\Phi_k = M_k \sum_{i=1}^n [q(T) - q_T]^2$, где $\{M_k\}$ – это заданная положительная последовательность, которая стремится к бесконечности. И с учетом введенной функции построим новый функционал вида

$$J_k = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \{u^*(t) R_0 u(t)\} dt + M_k \sum_{i=1}^n [q(T) - q_T]^2$$

Таким образом, исходная задача была переформулирована: для заданного значения k необходимо определить оптимальное управление, которое минимизирует функционал J_k при ограничениях вида (4.1)–(4.3).

В результате задача была преобразована в задачу оптимального управления с фиксированным конечным состоянием и ограничениями на управление. Для решения этой задачи будет построена функция Гамильтона.

$$H_k = -\frac{1}{2} u^*(t) R_0 u(t) + (f(q, t) + B(q) u(t))^* \psi_k$$

Учитывая все выводы, был разработан алгоритм для обеспечения оптимального принятия решений за счет учета ключевых параметров системы, ограничений и целей производительности. Он повышает вычислительную эффективность, улучшает адаптивность к динамическим условиям и обеспечивает структурированный подход к достижению оптимальных стратегий управления.

Структура алгоритма следующая:

1-ый шаг: Сначала вычисляем начальное значение функционала J_k устанавливая $k=0$.

2-ой шаг: Далее определим оптимальное управление для k -ой итерации по уравнению (4.15). Здесь ψ_k – это решение сопряженной системы дифференциальных уравнений, заданной в (4.14) с условием вида:

$$\psi_k(T) = -2M_k \sum_{i=1}^n [q_k(T) - q_T], \quad (4.16)$$

где q_k – это решение исходной системы уравнений (4.2) при начальных условиях вида (4.3).

3-ий шаг: С использованием найденных оптимальной траектории q_k и оптимального управления u_k , рассчитывается значение функционала J_k для текущей k -ой итерации.

4-ый шаг: Проверяется условие сходимости: если абсолютная разница между значениями функционала на текущей J_k и предыдущей J_{k-1} итерациях меньше или равна заданной точности ε (где $\varepsilon > 0$), то переходим к шагу 5. В противном случае, если условие не выполнено, переходим к следующей итерации, увеличивая k на 1 ($k = k + 1$), и возвращаемся к шагу 2.

5-ый шаг: Найденная пара траектории и управления (q_k, u_k) является оптимальным решением.

4.3 Численные расчеты

Для автоматизации процесса нахождения оптимального управления напомним следующую программу на Matlab:

```
clc
format short
syms v Teta Psi x y z Ux Uy Fi1 Fi2 Fi3 Fi4 Fi5 Fi6
U=[Ux Uy]
g = 9.8; alfa = 30; alf1=10.0; alf2=10.0;
P = 2000; m = 3; gamma = 45; Xa = 0.32; Ya = 0.4;
%Ux = (P*cos(alfa) - Xa)/(m*g); Uy = (P*sin(alfa) + Ya)/(m*g);
f1=g*(Ux-sin(Teta));
f2=g*(Uy*cos(gamma)-cos(Teta))/v;
f3=-g*Uy*sin(gamma)/(v*cos(Teta));
f4=v*cos(Teta)*cos(Psi);
f5=v*sin(Teta);
f6=-v*cos(Teta)*sin(Psi);
H=-alf1*Ux*Ux-alf2*Uy*Uy+f1*Fi1+f2*Fi2+f3*Fi3+f4*Fi4+f5*Fi5+f6*Fi6;
disp('H='); disp(vpa(H,3));
disp('f1='); disp(vpa(f1,3));
disp('f2='); disp(vpa(f2,3));
disp('f3='); disp(vpa(f3,3));
disp('f4='); disp(vpa(f4,3));
disp('f5='); disp(vpa(f5,3));
disp('f6='); disp(vpa(f6,3));
```

```

fp1=-diff(H,V); fp2=-diff(H,Teta); fp3=-diff(H,Kci);
fp4=-diff(H,x); fp5=-diff(H,y); fp6=-diff(H,z);
disp('fp1='); disp(vpa(fp1,3));
disp('fp2='); disp(vpa(fp2,3));
disp('fp3='); disp(vpa(fp3,3));
disp('fp4='); disp(vpa(fp4,3));
disp('fp5='); disp(vpa(fp5,3));
disp('fp6='); disp(vpa(fp6,3));
H1=-diff(H,ux); H2=-diff(H,uy);
disp('H1='); disp(vpa(H1,3)); disp('H2='); disp(vpa(H2,3));
H12=[H1 H2];
disp('H12=');disp(vpa(H12,3));
Hs1=sym(strcat(char(H1),'=0'));
Hs2=sym(strcat(char(H2),'=0'));
disp('Hs1='); disp(vpa(Hs1,3)); disp('Hs2='); disp(vpa(Hs2,3));
Hs12=[Hs1 Hs2];
disp('Hs12=');disp(vpa(Hs12,3));

```

В результате ее выполнения получим аналитический вид исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений, вид функции Гамильтона для математической модели БПЛА

$$\begin{cases} \dot{V} = g(n_{xa} - \sin\Theta) \\ \dot{\Theta} = g(n_{ya}\cos\gamma - \cos\Theta)/V \\ \dot{\Psi} = -gn_{ya}\sin\gamma/(V\cos\Theta) \\ \dot{x} = V\cos\Theta\cos\Psi \\ \dot{y} = V\sin\Theta \\ \dot{z} = -V\cos\Theta\sin\Psi \end{cases}$$

```

H=-10.*Ux^2-10.*Uy^2+(9.80*Ux-9.80*sin(Teta))*Fi1+(5.15*Uy-
9.80*cos(Teta))/v*Fi2-8.34*Uy/v/cos(Teta)*Fi3+v*cos(Teta)*cos(Psi)*Fi4
+v*sin(Teta)*Fi5-1.*v*cos(Teta)*sin(Psi)*Fi6
f1=9.80*Ux-9.80*sin(Teta)
f2=(5.15*Uy-9.80*cos(Teta))/v
f3=-8.34*Uy/v/cos(Teta)
f4=v*cos(Teta)*cos(Psi)
f5=v*sin(Teta)
f6=-1.*v*cos(Teta)*sin(Psi)
fp1=(5.15*Uy-9.80*cos(Teta))/v^2*Fi2-8.34*Uy/v^2/cos(Teta)*Fi3-
1.*cos(Teta)*cos(Psi)*Fi4-1.*sin(Teta)*Fi5+cos(Teta)*sin(Psi)*Fi6
fp2=9.80*cos(Teta)*Fi1-
9.80*sin(Teta)/v*Fi2+8.34*Uy/v/cos(Teta)^2*Fi3*sin(Teta)
+v*sin(Teta)*cos(Psi)*Fi4-1.*v*cos(Teta)*Fi5-1.*v*sin(Teta)*sin(Psi)*Fi6
fp3=v*cos(Teta)*sin(Psi)*Fi4+v*cos(Teta)*cos(Psi)*Fi6

```

fp4=0

fp5=0

fp6=0

H1=-20.*Ux-9.80*Fi1

H2=-20.*Uy-5.15/v*Fi2+8.34/v/cos(Teta)*Fi3

Здесь $f_1, \dots, f_6$ – вид правой стороны исходной системы дифференциальных уравнений, $fp_1, \dots, fp_6$ – вид правой части сопряженной системы.

Полученные результаты передаются в программу, проводящую численные расчеты по нахождению оптимального управления.

Результаты выполнения программы выводятся в файл rez.txt, фрагмент которого приводится ниже

T=1,00 nt=1000

-10,00<=U1<=10,00

-5,00<=U2<=5,00

x0 = 8,00; = 1,00; = 3,00; = 5,00; = 1,00; = 3,00;

xk = 4,00; = 0,50; = 1,50; = 2,50; = 0,50; = 1,50;

.....

Mf = 1 = 1,00; = 1,00; = 1,00; = 1,00; = 1,00; = 1,00;

Итерация = 1

ynt = 1 = 1,29 xr=5,29 xk=4,00 abs=1,29

ynt = 2 = -1,12 xr=-0,62 xk=0,50 abs=-1,12

ynt = 3 = 1,50 xr=3,00 xk=1,50 abs=1,50

ynt = 4 = -1,77 xr=0,73 xk=2,50 abs=-1,77

ynt = 5 = 2,34 xr=2,84 xk=0,50 abs=2,34

ynt = 6 = 0,89 xr=2,39 xk=1,50 abs=0,89

ynt_abs = 2,34

funk = 1 Iter = 1 = 11,22 = 14,56 = 14,56 = 25,78 eps=9999974,22

Итерация = 2

ynt = 1 = -2,45 xr=1,55 xk=4,00 abs=-2,45

ynt = 2 = -1,94 xr=-1,44 xk=0,50 abs=-1,94

ynt = 3 = -22,18 xr=-20,68 xk=1,50 abs=-22,18

ynt = 4 = 1,72 xr=4,22 xk=2,50 abs=1,72

ynt = 5 = 1,50 xr=2,00 xk=0,50 abs=1,50

ynt = 6 = 1,08 xr=2,58 xk=1,50 abs=1,08

ynt_abs = 22,18

funk = 1 Iter = 2 = 1178,30 = 507,95 = 507,95 = 1686,25 eps=1660,47

Итерация = 3

ynt = 1 = 93,51 xr=97,51 xk=4,00 abs=93,51

ynt = 2 = -0,43 xr=0,07 xk=0,50 abs=-0,43

ynt = 3 = 2,94 xr=4,44 xk=1,50 abs=2,94

ynt = 4 = -21,17 xr=-18,67 xk=2,50 abs=-21,17

ynt = 5 = 13,87 xr=14,37 xk=0,50 abs=13,87

ynt = 6 = 46,46 xr=47,96 xk=1,50 abs=46,46

ynt_abs = 93,51

funk = 1 Iter = 3 = 1088,22 = 11551,78 = 11551,78 = 12640,00 eps=1336,91

Итерация = 4

ynt = 1 = -92,92 xr=-88,92 xk=4,00 abs=-92,92

ynt = 2 = -0,67 xr=-0,17 xk=0,50 abs=-0,67

ynt = 3 = -8,06 xr=-6,56 xk=1,50 abs=-8,06

ynt = 4 = -35,87 xr=-33,37 xk=2,50 abs=-35,87

ynt = 5 = 9,31 xr=9,81 xk=0,50 abs=9,31

ynt = 6 = -10,34 xr=-8,84 xk=1,50 abs=-10,34

ynt_abs = 92,92

funk = 1 Iter = 4 = 1123,88 = 10179,22 = 10179,22 = 11303,10 eps=1095,75

Итерация = 5

ynt = 1 = 92,37 xr=96,37 xk=4,00 abs=92,37

ynt = 2 = 0,98 xr=1,48 xk=0,50 abs=0,98

ynt = 3 = -2,04 xr=-0,54 xk=1,50 abs=-2,04

ynt = 4 = 6,05 xr=8,55 xk=2,50 abs=6,05

ynt = 5 = 52,02 xr=52,52 xk=0,50 abs=52,02

ynt = 6 = 0,21 xr=1,71 xk=1,50 abs=0,21

ynt_abs = 92,37

funk = 1 Iter = 5 = 1010,72 = 11279,26 = 11279,26 = 12289,98 eps=986,89

Итерация = 6

ynt = 1 = -103,44 xr=-99,44 xk=4,00 abs=-103,44

ynt = 2 = 1,20 xr=1,70 xk=0,50 abs=1,20

ynt = 3 = -12,09 xr=-10,59 xk=1,50 abs=-12,09

ynt = 4 = -1,00 xr=1,50 xk=2,50 abs=-1,00

ynt = 5 = -44,60 xr=-44,10 xk=0,50 abs=-44,60

ynt = 6 = -4,10 xr=-2,60 xk=1,50 abs=-4,10

ynt_abs = 103,44

funk = 1 Iter = 6 = 1095,49 = 12854,14 = 12854,14 = 13949,63 eps=659,64

Итерация = 7

ynt = 1 = 90,67 xr=94,67 xk=4,00 abs=90,67

ynt = 2 = -1,27 xr=-0,77 xk=0,50 abs=-1,27

ynt = 3 = -26,63 xr=-25,13 xk=1,50 abs=-26,63

ynt = 4 = 34,51 xr=37,01 xk=2,50 abs=34,51

ynt = 5 = -26,87 xr=-26,37 xk=0,50 abs=-26,87

ynt = 6 = 3,85 xr=5,35 xk=1,50 abs=3,85

ynt_abs = 90,67

funk = 1 Iter = 7 = 1069,60 = 10860,53 = 10860,53 = 11930,13 eps=609,50

Итерация = 8

ynt = 1 = -73,91 xr=-69,91 xk=4,00 abs=-73,91

ynt = 2 = 5,37 xr=5,87 xk=0,50 abs=5,37

ynt = 3 = -62,47 xr=-60,97 xk=1,50 abs=-62,47

ynt = 4 = 7,83 xr=10,33 xk=2,50 abs=7,83

ynt = 5 = 13,96 xr=14,46 xk=0,50 abs=13,96

ynt = 6 = 23,90 xr=25,40 xk=1,50 abs=23,90

ynt_abs = 73,91

funk = 1 Iter = 8 = 1146,94 = 10220,74 = 10220,74 = 11367,67 eps=562,45

Итерация = 9

ynt = 1 = 96,11 xr=100,11 xk=4,00 abs=96,11

$y_{nt} = 2 = 0,13$ $x_r = 0,63$ $x_k = 0,50$ $abs = 0,13$
 $y_{nt} = 3 = 1,96$ $x_r = 3,46$ $x_k = 1,50$ $abs = 1,96$
 $y_{nt} = 4 = -37,30$ $x_r = -34,80$ $x_k = 2,50$ $abs = -37,30$
 $y_{nt} = 5 = 32,01$ $x_r = 32,51$ $x_k = 0,50$ $abs = 32,01$
 $y_{nt} = 6 = 18,67$ $x_r = 20,17$ $x_k = 1,50$ $abs = 18,67$
 $y_{nt_abs} = 96,11$
 $funk = 1$ Iter = 9 = 1130,24 = 12004,98 = 12004,98 = 13135,22 $eps = 467,55$
 Итерация = 10
 $y_{nt} = 1 = -92,29$ $x_r = -88,29$ $x_k = 4,00$ $abs = -92,29$
 $y_{nt} = 2 = -0,82$ $x_r = -0,32$ $x_k = 0,50$ $abs = -0,82$
 $y_{nt} = 3 = -7,82$ $x_r = -6,32$ $x_k = 1,50$ $abs = -7,82$
 $y_{nt} = 4 = -35,78$ $x_r = -33,28$ $x_k = 2,50$ $abs = -35,78$
 $y_{nt} = 5 = 13,35$ $x_r = 13,85$ $x_k = 0,50$ $abs = 13,35$
 $y_{nt} = 6 = -3,38$ $x_r = -1,88$ $x_k = 1,50$ $abs = -3,38$
 $y_{nt_abs} = 92,29$
 $funk = 1$ Iter = 10 = 1128,53 = 10049,55 = 10049,55 = 11178,08 $eps = 357,14$
 Итерация = 11
 $y_{nt} = 1 = 92,36$ $x_r = 96,36$ $x_k = 4,00$ $abs = 92,36$
 $y_{nt} = 2 = 0,99$ $x_r = 1,49$ $x_k = 0,50$ $abs = 0,99$
 $y_{nt} = 3 = -2,25$ $x_r = -0,75$ $x_k = 1,50$ $abs = -2,25$
 $y_{nt} = 4 = 5,56$ $x_r = 8,06$ $x_k = 2,50$ $abs = 5,56$
 $y_{nt} = 5 = 52,05$ $x_r = 52,55$ $x_k = 0,50$ $abs = 52,05$
 $y_{nt} = 6 = 0,49$ $x_r = 1,99$ $x_k = 1,50$ $abs = 0,49$
 $y_{nt_abs} = 92,36$
 $funk = 1$ Iter = 11 = 1009,53 = 11276,69 = 11276,69 = 12286,22 $eps = 318,14$
 Функционал = 2
 $M_f = 2 = 2,00; = 2,00; = 2,00; = 2,00; = 2,00; = 2,00;$
 Итерация = 1
 $y_{nt} = 1 = -207,08$ $x_r = -99,54$ $x_k = 4,00$ $abs = -103,54$
 $y_{nt} = 2 = 1,89$ $x_r = 1,44$ $x_k = 0,50$ $abs = 0,94$
 $y_{nt} = 3 = -11,24$ $x_r = -4,12$ $x_k = 1,50$ $abs = -5,62$
 $y_{nt} = 4 = 9,91$ $x_r = 7,45$ $x_k = 2,50$ $abs = 4,95$
 $y_{nt} = 5 = -89,65$ $x_r = -44,33$ $x_k = 0,50$ $abs = -44,83$
 $y_{nt} = 6 = 12,64$ $x_r = 7,82$ $x_k = 1,50$ $abs = 6,32$
 $y_{nt_abs} = 103,54$
 $funk = 2$ Iter = 1 = 1029,50 = 25653,72 = 12826,86 = 26683,22 $eps = 9973316,78$
 Итерация = 2
 $y_{nt} = 1 = 191,29$ $x_r = 99,65$ $x_k = 4,00$ $abs = 95,65$
 $y_{nt} = 2 = 0,26$ $x_r = 0,63$ $x_k = 0,50$ $abs = 0,13$
 $y_{nt} = 3 = 3,91$ $x_r = 3,46$ $x_k = 1,50$ $abs = 1,96$
 $y_{nt} = 4 = -74,89$ $x_r = -34,94$ $x_k = 2,50$ $abs = -37,44$
 $y_{nt} = 5 = 67,10$ $x_r = 34,05$ $x_k = 0,50$ $abs = 33,55$
 $y_{nt} = 6 = 29,67$ $x_r = 16,34$ $x_k = 1,50$ $abs = 14,84$
 $y_{nt_abs} = 95,65$
 $funk = 2$ Iter = 2 = 1147,26 = 23799,41 = 11899,70 = 24946,67 $eps = 1736,55$
 Итерация = 3
 $y_{nt} = 1 = -184,32$ $x_r = -88,16$ $x_k = 4,00$ $abs = -92,16$

$y_{nt} = 2 = -1,69$ $x_r = -0,35$ $x_k = 0,50$ $abs = -0,85$
 $y_{nt} = 3 = -15,54$ $x_r = -6,27$ $x_k = 1,50$ $abs = -7,77$
 $y_{nt} = 4 = -70,99$ $x_r = -32,99$ $x_k = 2,50$ $abs = -35,49$
 $y_{nt} = 5 = 28,43$ $x_r = 14,71$ $x_k = 0,50$ $abs = 14,21$
 $y_{nt} = 6 = -3,73$ $x_r = -0,37$ $x_k = 1,50$ $abs = -1,87$
 $y_{nt_abs} = 92,16$
 $funk = 2$ Iter = 3 = 1170,18 = 20040,39 = 10020,19 = 21210,57 $eps = 756,10$
 Итерация = 4
 $y_{nt} = 1 = 184,70$ $x_r = 96,35$ $x_k = 4,00$ $abs = 92,35$
 $y_{nt} = 2 = 2,11$ $x_r = 1,56$ $x_k = 0,50$ $abs = 1,06$
 $y_{nt} = 3 = -10,04$ $x_r = -3,52$ $x_k = 1,50$ $abs = -5,02$
 $y_{nt} = 4 = 6,02$ $x_r = 5,51$ $x_k = 2,50$ $abs = 3,01$
 $y_{nt} = 5 = 104,29$ $x_r = 52,64$ $x_k = 0,50$ $abs = 52,14$
 $y_{nt} = 6 = -0,58$ $x_r = 1,21$ $x_k = 1,50$ $abs = -0,29$
 $y_{nt_abs} = 92,35$
 $funk = 2$ Iter = 4 = 1227,22 = 22565,58 = 11282,79 = 23792,80 $eps = 582,23$
 Итерация = 5
 $y_{nt} = 1 = -194,03$ $x_r = -93,02$ $x_k = 4,00$ $abs = -97,02$
 $y_{nt} = 2 = 4,97$ $x_r = 2,98$ $x_k = 0,50$ $abs = 2,48$
 $y_{nt} = 3 = 22,28$ $x_r = 12,64$ $x_k = 1,50$ $abs = 11,14$
 $y_{nt} = 4 = 86,28$ $x_r = 45,64$ $x_k = 2,50$ $abs = 43,14$
 $y_{nt} = 5 = -17,69$ $x_r = -8,35$ $x_k = 0,50$ $abs = -8,85$
 $y_{nt} = 6 = 12,01$ $x_r = 7,51$ $x_k = 1,50$ $abs = 6,01$
 $y_{nt_abs} = 97,02$
 $funk = 2$ Iter = 5 = 1193,86 = 23035,51 = 11517,76 = 24229,38 $eps = 436,58$
 Итерация = 6
 $y_{nt} = 1 = 186,54$ $x_r = 97,27$ $x_k = 4,00$ $abs = 93,27$
 $y_{nt} = 2 = -3,46$ $x_r = -1,23$ $x_k = 0,50$ $abs = -1,73$
 $y_{nt} = 3 = -34,10$ $x_r = -15,55$ $x_k = 1,50$ $abs = -17,05$
 $y_{nt} = 4 = -28,60$ $x_r = -11,80$ $x_k = 2,50$ $abs = -14,30$
 $y_{nt} = 5 = -77,80$ $x_r = -38,40$ $x_k = 0,50$ $abs = -38,90$
 $y_{nt} = 6 = -4,72$ $x_r = -0,86$ $x_k = 1,50$ $abs = -2,36$
 $y_{nt_abs} = 93,27$
 $funk = 2$ Iter = 6 = 1094,47 = 21433,28 = 10716,64 = 22527,75 $eps = 301,63$
 Итерация = 7
 $y_{nt} = 1 = -167,12$ $x_r = -79,56$ $x_k = 4,00$ $abs = -83,56$
 $y_{nt} = 2 = 1,02$ $x_r = 1,01$ $x_k = 0,50$ $abs = 0,51$
 $y_{nt} = 3 = 3,81$ $x_r = 3,41$ $x_k = 1,50$ $abs = 1,91$
 $y_{nt} = 4 = 33,75$ $x_r = 19,38$ $x_k = 2,50$ $abs = 16,88$
 $y_{nt} = 5 = -44,62$ $x_r = -21,81$ $x_k = 0,50$ $abs = -22,31$
 $y_{nt} = 6 = -6,33$ $x_r = -1,67$ $x_k = 1,50$ $abs = -3,17$
 $y_{nt_abs} = 83,56$
 $funk = 2$ Iter = 7 = 1147,10 = 15558,26 = 7779,13 = 16705,36 $eps = 282,39$
 Итерация = 8
 $y_{nt} = 1 = 114,29$ $x_r = 61,15$ $x_k = 4,00$ $abs = 57,15$
 $y_{nt} = 2 = -3,45$ $x_r = -1,23$ $x_k = 0,50$ $abs = -1,73$
 $y_{nt} = 3 = -22,48$ $x_r = -9,74$ $x_k = 1,50$ $abs = -11,24$

$y_{nt} = 4 = -11,24$ $x_r = -3,12$ $x_k = 2,50$ $abs = -5,62$
 $y_{nt} = 5 = -30,17$ $x_r = -14,58$ $x_k = 0,50$ $abs = -15,08$
 $y_{nt} = 6 = -2,70$ $x_r = 0,15$ $x_k = 1,50$ $abs = -1,35$
 $y_{nt_abs} = 57,15$
 $funk = 2$ Iter = 8 = 1121,34 = 7311,65 = 3655,83 = 8433,00 eps=272,36
 Итерация = 9
 $y_{nt} = 1 = -173,37$ $x_r = -82,69$ $x_k = 4,00$ $abs = -86,69$
 $y_{nt} = 2 = 7,51$ $x_r = 4,26$ $x_k = 0,50$ $abs = 3,76$
 $y_{nt} = 3 = -1,53$ $x_r = 0,73$ $x_k = 1,50$ $abs = -0,77$
 $y_{nt} = 4 = 29,64$ $x_r = 17,32$ $x_k = 2,50$ $abs = 14,82$
 $y_{nt} = 5 = 70,59$ $x_r = 35,79$ $x_k = 0,50$ $abs = 35,29$
 $y_{nt} = 6 = -17,32$ $x_r = -7,16$ $x_k = 1,50$ $abs = -8,66$
 $y_{nt_abs} = 86,69$
 $funk = 2$ Iter = 9 = 1153,98 = 18138,83 = 9069,41 = 19292,81 eps=259,81
 Итерация = 10
 $y_{nt} = 1 = 196,41$ $x_r = 102,21$ $x_k = 4,00$ $abs = 98,21$
 $y_{nt} = 2 = -0,64$ $x_r = 0,18$ $x_k = 0,50$ $abs = -0,32$
 $y_{nt} = 3 = 5,51$ $x_r = 4,26$ $x_k = 1,50$ $abs = 2,76$
 $y_{nt} = 4 = -49,22$ $x_r = -22,11$ $x_k = 2,50$ $abs = -24,61$
 $y_{nt} = 5 = 32,62$ $x_r = 16,81$ $x_k = 0,50$ $abs = 16,31$
 $y_{nt} = 6 = 88,88$ $x_r = 45,94$ $x_k = 1,50$ $abs = 44,44$
 $y_{nt_abs} = 98,21$
 $funk = 2$ Iter = 10 = 1119,74 = 24997,22 = 12498,61 = 26116,96 eps=224,15
 Итерация = 11
 $y_{nt} = 1 = -184,81$ $x_r = -88,41$ $x_k = 4,00$ $abs = -92,41$
 $y_{nt} = 2 = -1,56$ $x_r = -0,28$ $x_k = 0,50$ $abs = -0,78$
 $y_{nt} = 3 = -15,77$ $x_r = -6,39$ $x_k = 1,50$ $abs = -7,89$
 $y_{nt} = 4 = -71,91$ $x_r = -33,45$ $x_k = 2,50$ $abs = -35,95$
 $y_{nt} = 5 = 25,07$ $x_r = 13,03$ $x_k = 0,50$ $abs = 12,53$
 $y_{nt} = 6 = -9,60$ $x_r = -3,30$ $x_k = 1,50$ $abs = -4,80$
 $y_{nt_abs} = 92,41$
 $funk = 2$ Iter = 11 = 1164,04 = 20148,99 = 10074,49 = 21313,03 eps=203,93
 Функционал = 3
 $M_f = 3 = 4,00; = 4,00; = 4,00; = 4,00; = 4,00; = 4,00;$
 Итерация = 1
 $y_{nt} = 1 = 369,40$ $x_r = 96,35$ $x_k = 4,00$ $abs = 92,35$
 $y_{nt} = 2 = 4,19$ $x_r = 1,55$ $x_k = 0,50$ $abs = 1,05$
 $y_{nt} = 3 = -16,90$ $x_r = -2,72$ $x_k = 1,50$ $abs = -4,22$
 $y_{nt} = 4 = 12,05$ $x_r = 5,51$ $x_k = 2,50$ $abs = 3,01$
 $y_{nt} = 5 = 208,56$ $x_r = 52,64$ $x_k = 0,50$ $abs = 52,14$
 $y_{nt} = 6 = 0,15$ $x_r = 1,54$ $x_k = 1,50$ $abs = 0,04$
 $y_{nt_abs} = 92,35$

 $F1 == 1009,53$ 11276,69 11276,69
 $F2 == 1164,04$ 20148,99 10102,31
 $F3 == 1191,48$ 40409,25 10874,49
 $F4 == 1127,07$ 42853,26 5356,66

F5 == 1250,00 184817,12 4551,07
 F6 == 1244,47 321606,47 3050,20

Всего выполнено расчетов для 6 функционалов F1,...,F6. Как видно из последнего столбца разница между заданной и конечной точкой уменьшаются.



Рисунок 12. Исходный функционал



Рисунок 13. Расхождение на конце траектории

Как видно из рис. 12 значение функционала может как увеличиваться, так и уменьшаться. Это не противоречит теории оптимального управления, т.к. если суммировать значение исходного функционала и штрафа на конце, происходит его постепенное уменьшение.

Рис. 13 демонстрирует уменьшение расхождения от заданного конечного состояния с увеличением номера итераций. Значение исходного функционала, начиная с пятой итерации, практически не изменяется.

На рисунках 14-21 представлены графики изменений оптимальной траектории в одномерной, двумерной и трехмерной проекциях.

На графиках 14-16 показаны изменение оптимальных траекторий по x , y , z . На графиках указаны итерации. Показаны результаты с первой по шестой итерации по переменным x , y , z .

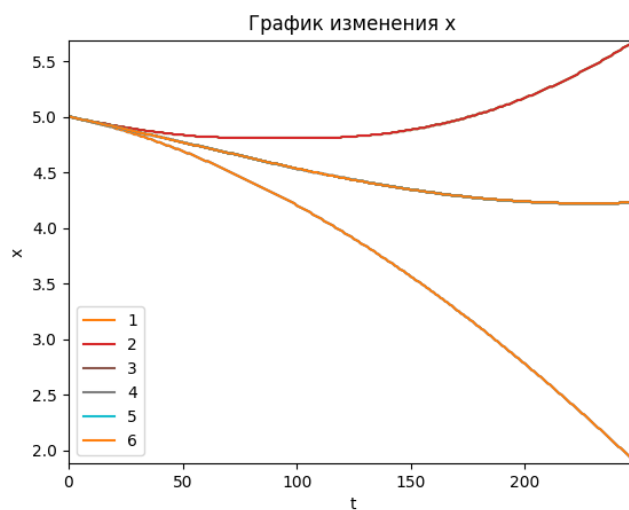


Рисунок 14. График изменения переменной x по времени t

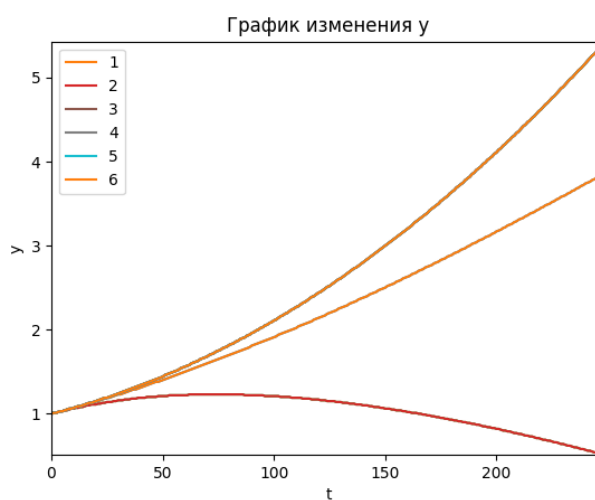


Рисунок 15. График изменения переменной y по времени t

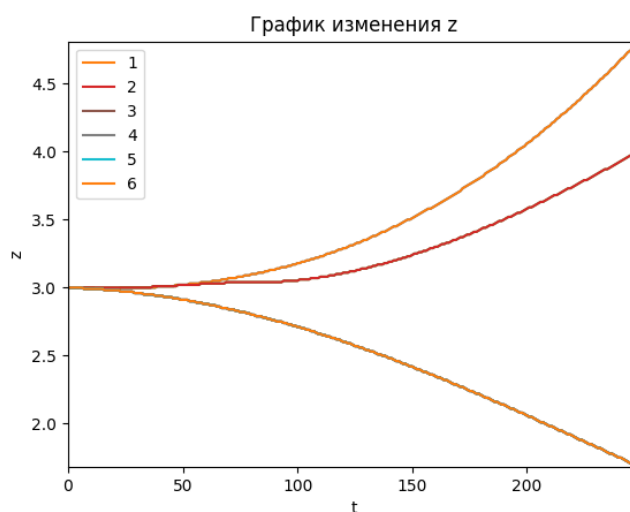


Рисунок 16. График изменения переменной z по времени t

С увеличением штрафных функций происходит слияние траекторий с третьей по шестой итерации. Улучшений нет, поэтому это является окончательным результатом.

На рис. 17-19 показаны графики траекторий по фазовым координатам x , y , z . На этих графиках показана взаимосвязь по переменным x и y , x и z , y и z . Визуальное представление этих фазовых траекторий дает представление о динамическом поведении системы, подчеркивая стабильность и зависимость между координатами.

На рис. 20 показаны изменения траекторий с учетом итераций в трехмерном виде. Эта визуализация позволяет провести комплексный анализ состояния динамической системы, демонстрируя, как траектории изменяются с каждой итерацией. Трехмерное представление показывает более наглядные изменения стабильности, сходимости и общее поведение системы, что является существенным для оценки эффективности управления и оптимизации производительности ее работы.

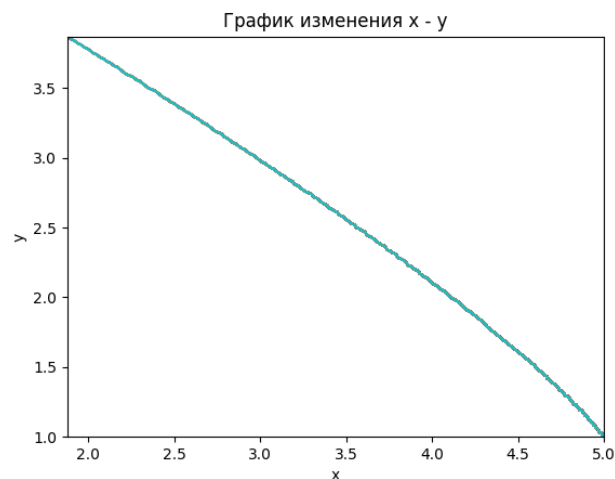


Рисунок 17. График изменения оптимальной траектории по переменным x и y

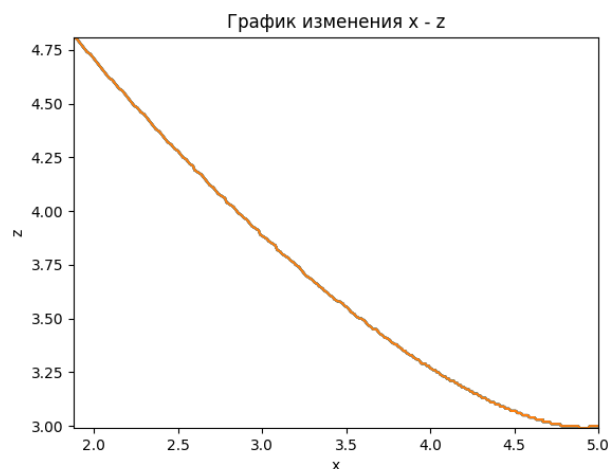


Рисунок 18. График изменения оптимальной траектории по переменным x и z

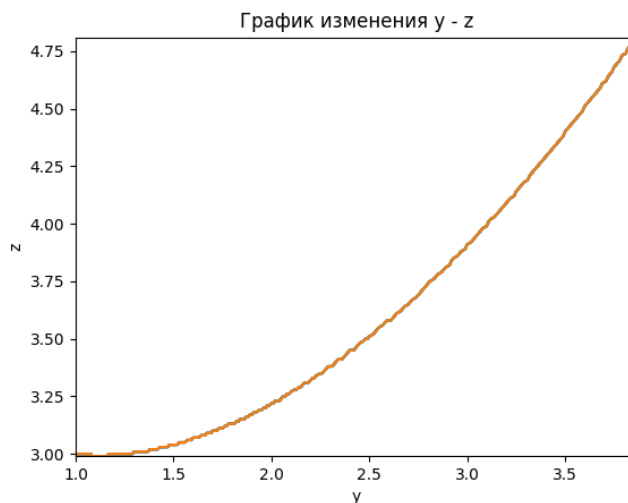


Рисунок 19. График изменения оптимальной траектории по переменным y и z

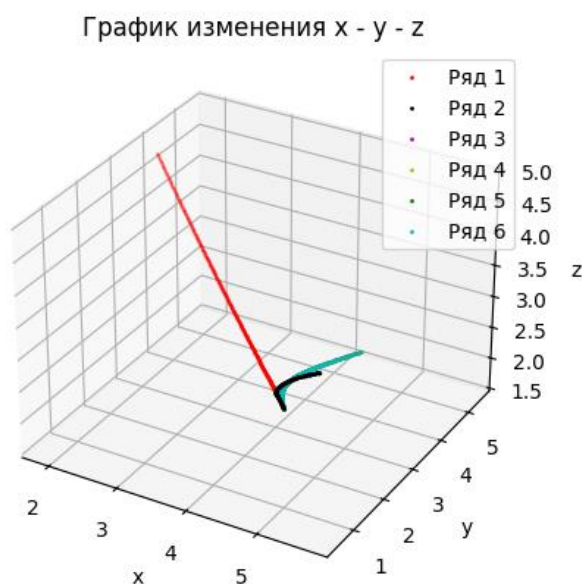


Рисунок 20. Графики изменения пространственной оптимальной траектории для ряда минимизируемых функционалов

На рис. 21 показан график по двум управлениям n_{xa} и n_{ya} . Т.к. управление было импульсным, имеется всплеск и далее управление стабилизируется. Это поведение отражает реакцию системы на применяемое управляющее воздействие, при котором начальный импульс приводит к быстрой настройке, прежде чем система войдет в устойчивое состояние.

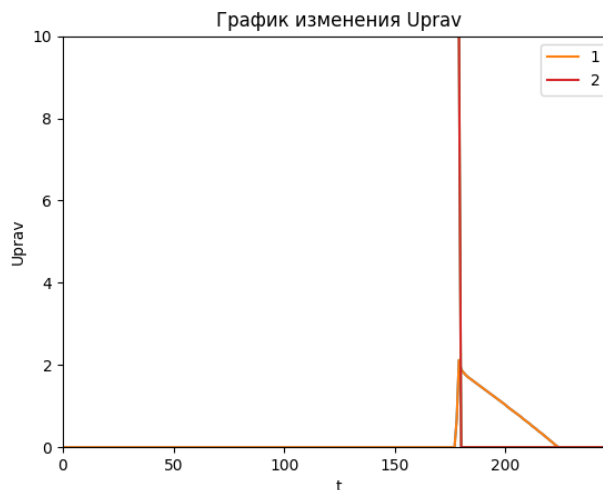


Рисунок 21. Графики изменения оптимального управления

4.4 Выводы по четвертому разделу

Определение оптимального управления – ключевой аспект в области математического моделирования и управления динамическими системами. В данном разделе была сформулирована и доказана соответствующая теорема, представляющая собой фундаментальный шаг в понимании и решении задач оптимизации.

Для конкретной математической модели БПЛА была разработана процедура построения функции Гамильтона, которая является ключевым инструментом в теории оптимального управления. Эта функция была сопряжена с системой дифференциальных уравнений, что позволило провести анализ динамики системы и определить оптимальное управление для достижения заданных целей.

Применение подхода регуляризации к исходному функционалу способствовало разработке эффективного алгоритма решения задачи оптимального управления с фиксированными концами. Этот алгоритм обеспечивает устойчивость и высокую точность при решении даже сложных задач оптимизации.

Для оценки производительности предложенного алгоритма были проведены численные расчеты на основе конкретных числовых данных. Результаты этих расчетов подтвердили конструктивность и удобство применения разработанного метода в реальных условиях.

5 УПРАВЛЕНИЕ ГРУППОЙ БПЛА

5.1 Литературный обзор по проблеме управления группой БПЛА

В последнее время актуальным становится управление группой БПЛА, которые являются многокомпонентными динамическими системами. В эту систему входят БПЛА, у которых разные возможности по радиусу действия, по энергоресурсам и по выполняемым функциям. Научных исследований по групповому управлению БПЛА становится много и предлагаются различные методы и алгоритмы для решения данного вопроса. Повышенный интерес исследователей во всем мире к теме группового управления БПЛА подтверждает актуальность такой задачи.

В статье [101] предложено управление с использованием биоинспирированными алгоритмами. Авторы провели сравнительный анализ некоторых биоинспирированных алгоритмов, выделив их сильные стороны и указали на перспективы развития применения их.

В работе [102] автор успешно применил метод относительного пространственного состояния для решения задачи формирования и поддержания строя для летательных аппаратов с фиксированными крыльями. Будущие исследования будут возможно сосредоточены на изучении масштабируемости подхода для более крупных роями БПЛА, его устойчивость в различных условиях окружающей среды и потенциальные реальные внедрения в автономные воздушные операции.

Wang, Z. и др. предложили новую модель распределения задач для разведывательных миссий с участием нескольких БПЛА [103]. Кроме того, они предложили эффективный генетический алгоритм, разработанный для оптимизации последовательности выполнения задач БПЛА.

Планирование маршрута является ключевым аспектом успеха миссии БПЛА и сложность этой задачи значительно увеличивается, когда она применяется к роям БПЛА. Кроме того, введение кривых на основе полиномов может создать гладкую, непрерывную траекторию БПЛА, соответствующую требованиям безопасности. Чтобы справиться с этими вызовами в работе [104] предлагается подход на основе мульти-алгоритмической гибридной оптимизации муравьиной колонии, названный МАНАСО, для трехмерной модели гладкого планирования маршрута для роя БПЛА.

При групповом управлении возникает вопрос организации взаимодействия между собой БПЛА. Каждая БПЛА – это автономная система и возникает задача формирования строя и управления такими системами путем точного определения параметров движения (координаты и скорость движения). В своей диссертации Королев Л.Ю. [105] предложил алгоритм фильтрации параметров движения группы БПЛА. Алгоритмы позволяют в условиях неопределённости повысить точность оценивания параметров в 3-5 раз.

При решении задачи управления полетом роя БПЛА выбор математической модели для описания движения группы в пространстве имеет главное значение. Как мы знаем, уравнения динамики образуют сложную систему нелинейных дифференциальных уравнений, включая уравнения сил, кинематику, уравнения моментов и набор ограничивающих уравнений, которые связывают параметры движения в различных координатных системах. Точное моделирование этих динамических процессов имеет решающее значение для обеспечения точного планирования траектории, предотвращения столкновений и скоординированного маневрирования внутри роя. Для повышения эффективности и устойчивости стратегий управления в динамичных и неопределенных условиях часто используются современные вычислительные методы и алгоритмы оптимизации.

Учитывая присущую сложность этих уравнений, будущие исследования будут сосредоточены на разработке эффективных численных методов для вычислений в реальном времени, повышении точности модели с помощью методов машинного обучения и изучении децентрализованных стратегий управления для повышения автономности и устойчивости роя БПЛА в динамических операционных средах.

5.2. Разработка алгоритма автоматического выбора целей группой БПЛА

Рассматривается группа БПЛА, состоящая из K единиц. Действия всей группы синхронизируются и управляются из Центра управления полетами (ЦУП).

Каждый БПЛА обладает собственными характеристиками, определяющими его способности по дальности и скорости полета. Беспилотный аппарат может обмениваться информацией только с ЦУПом. Кроме того, каждый БПЛА оснащен системой радиолокационного позиционирования, способной в реальном времени определять свои координаты и, на их основе, решать задачи достижимости определенной цели, учитывая координаты конечной точки (КТ) и собственные технические характеристики.

ЦУП одновременно передает всем БПЛА координаты КТ и задает ограничение по времени для ее достижения. Каждый БПЛА, получив координаты КТ, решает задачу о возможности достижения КТ и сообщает ЦУПу о своей готовности и минимальном времени, необходимом для выполнения миссии.

На основе информации, полученной от группы БПЛА, ЦУП определяет приоритетность каждого БПЛА в выполнении поставленной задачи.

Математическая модель движения БПЛА может быть описана системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1)-(1.2). Введем обозначения (1.3).

Для каждого БПЛА на основе уравнений (1.1)-(1.2) перепишем математическую модель в виде следующих систем дифференциальных:

$$\frac{dq_i}{dt} = f_i(q_i) + B_i u_i, i = \overline{1, k} \quad (5.1)$$

где u_i – вектор-управления размерности m .

На управление для каждого БПЛА даются определенные ограничения

$$u_i(t) \in U_i = \left\{ u_i(t): u_{i,j}(t) \in C[[t_0, t_1]; 0 \leq u_{i,j}(t) \leq L_{i,j}, \right. \\ \left. i = \overline{1, k}, j = \overline{1, m}, t \in [t_0, t_1] \right\}. \quad (5.2)$$

Рассматриваемая в работе проблема сводится к исследованию нескольких задач.

1) ЦУП передает всем беспилотникам ограничение по времени и координаты КТ в следующем виде:

- T – за время $(0, T)$ КТ должна быть достигнута хотя бы одним БПЛА.
- $(x_{\text{ц}}, y_{\text{ц}}, z_{\text{ц}})$ – координаты КТ.

Примечание. В случае невозможности достижения КТ всеми беспилотниками ЦУП признает этот факт и переключается на решение других задач.

2) Все БПЛА одновременно решают следующую задачу достижимости, которую мы сформулируем для i -го беспилотника: может ли беспилотник, динамика которого описывается уравнениями (5.1) при технических характеристиках (5.2) и с начальными условиями

$$q_i(0) = q_{i,0} \quad (5.3)$$

за время меньше или равное T , достичь КТ

$$q_{i,1}(T) = x_{\text{ц}}, q_{i,2}(T) = y_{\text{ц}}, q_{i,3}(T) = z_{\text{ц}}, \\ q_T = (x_{\text{ц}}, y_{\text{ц}}, z_{\text{ц}}). \quad (5.4)$$

Каждый из БПЛА возвращает в ЦУП ответ в виде двух чисел. Первое число означает возможность достижения КТ и принимает два значения: 0 – КТ не может быть достигнута и 1 – КТ находится в области его достижимости. Второе число в случае достижимости КТ равно минимальному значению времени, за которое КТ может быть достигнута.

3) ЦУП формирует список ответов всех беспилотников в виде матрицы R размерности $2 * K$. Значения элементов матрицы R определены следующим образом $R(1, i) = 0$ (если КТ не может быть достигнута i -м БПЛА) и $R(1, i) = 1$ (КТ достижима); $R(2, i) = T_i$, где $T_i \leq T$ – минимальное время, за которое i -й беспилотник достигает КТ.

Далее ЦУП выбирает из списка R номер беспилотника $\{s\}$ с минимальным значением времени T_i при условии достижения КТ. Математически это может быть записано следующим образом:

$$T_s = \min\{R(2, i) | R(1, i) = 1, i = \overline{1, k}\} \quad (5.5)$$

Задача по достижению КТ ставится беспилотнику с номером $\{s\}$. Остальные БПЛА переходят в режим ожидания дальнейших указаний из ЦУПа.

4) Критерий достижимости i -м БПЛА поставленной цели

При фиксированном управлении $u_i(t) \in U_i$ и ограничениях на правую часть задачи Коши (5.1)-(5.3) будут выполнены условия теоремы существования и единственности решения $q_i(t), t \in [0, T]$ [65].

Представим интегральную рекуррентную форму задачи Коши (5.1)-(5.3) в следующем виде:

$$q_i(t) = q_{i,0} + \int_0^t f_i(q_i(\tau))d\tau + \int_0^t B_i u_i(\tau)d\tau. \quad (5.6)$$

Уравнение (5.6) является частным случаем интегрального уравнения Вольтерра-Урысона второго рода [66].

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(\tau, y(\tau))d\tau, \quad (5.7)$$

где

$$y(t) = q_i(t); g(t) = q_{i,0} + \int_0^t B_i u_i(\tau)d\tau; K(\tau, y(\tau)) = f_i(y(\tau)).$$

Для решения поставленной задачи применим результаты интервального анализа [100, 106]. Обозначим интервальную вектор-функцию

$$g(t) = q_{i,0} + \int_0^t B_i v_i d\tau, t \in [0, T]. \quad (5.8)$$

Здесь знак $v_i = (v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,m})$ обозначает интервальный m -вектор с интервальными элементами $v_{i,j} = (L_{i,j}/2, L_{i,j}/2)$.

Теорема 5.1. Пусть уравнение (5.1) имеет единственное непрерывное решение при заданной непрерывной функции $u_i(t) \in C[0, T]$, удовлетворяющей условию (5.2). Тогда это решение может быть найдено методом простой итерации (последовательных приближений).

Доказательство. Метод простой итерации в применении к интегральному уравнению состоит в получении последовательности функций (приближений) $q_{i,k}(t)$, $k=0, 1, 2, \dots$ посредством рекуррентного соотношения

$$q_{i,k+1}(t) = q_{i,0} + \int_0^t K(\tau, q_{i,k}(\tau))d\tau + \int_0^t B_i u_i(\tau)d\tau, \quad (5.9)$$

$$t \in [0, T], k=1, 2 \dots$$

Обозначим

$$g(t) = q_{i,0} + \int_0^t B_i u_i(\tau)d\tau, \quad \varphi_0(t) = g(t);$$

$$\varphi_{k+1}(t) = g(t) + \int_0^t K(\tau, \varphi_k(\tau))d\tau.$$

Тогда искомое решение можно представить в виде ряда

$$q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k, \quad (5.10)$$

который сходится если $f(t)$ непрерывна на $[0, T]$ и $K(t, \tau)$ непрерывна на $0 \leq t, \tau \leq T$.

Обозначим $M = \sup_{0 \leq t, s \leq T} |K(t, s)|$, $N = \|q_{i,0}\| * T * L * \|B_i\|$. Можно оценить k -е приближение к искомому решению посредством выражения

$$|\varphi_k(t)| \leq NM^k T^k / k! \quad (5.11)$$

Из (5.11) следует факториальная сходимость метода последовательных приближений.

В качестве приближенного решения можно взять

$$q_{i,r}(t) = \sum_{k=0}^r \varphi_k(t), \quad t \in [0, T], \quad (5.12)$$

точность которого оценивается следующим выражением

$$|q_i(t) - q_{i,r}(t)| = \left| \sum_{k=r+1}^{\infty} \varphi_k(t) \right| \leq \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{NM^k T^k}{k!} = N \left\{ \exp(MT) - \sum_{k=0}^r \frac{M^k T^k}{k!} \right\}$$

Отсюда следует равномерная и абсолютная сходимость ряда (5.12) при любом фиксированном управлении $u_i(t) \in U_i, t \in [0, T]$. Теорема доказана.

Теорема 5.2. КТ достижима i -м БПЛА, если 3-х мерный вектор q_T , составленный из координат цели (5.4), принадлежит первым трем элементам интервального вектора $q_{i,r}(T)$.

Доказательство.

Перепишем приближенное решение (5.12) в момент времени T в виде следующего интервального интегрального выражения

$$q_{i,r}(T) = \sum_{k=0}^r \varphi_k(T), \quad (5.15)$$

$$\varphi_0(T) = g(T); \quad \varphi_{k+1}(T) = g(T) + \int_0^T f_i(t, \tau, \varphi_k(\tau))d\tau.$$

где знак $*$ – обозначает интервальное умножение, $q_{i,r}(T)$ – интервальный граничный вектор в момент времени T и r выбирается из условия $N \left\{ \exp(MT) - \sum_{k=0}^r \frac{M^k T^k}{k!} \right\} \leq \varepsilon$ (ε – требуемая точность).

Отсюда из принадлежности граничного вектора q_T интервальному вектору $q(T)$ следует достижимость КТ i -м беспилотником.

Тем самым следует справедливость утверждения теоремы.

При выполнении теоремы 5.2, т.е. при достижимости i -м БПЛА КТ, для вычисления минимального времени достижимости предлагается следующая процедура

```
Ti = 0; tay = 0.01;
while (Ti <= T) do begin
  Ti = T + tay;
```

вычисляется интервальный вектор $q_{i,r}(Ti)$.

если вектор q_T принадлежит первым трем элементам интервального вектора $q_{i,r}(Ti)$, то осуществляется выход из цикла. break;

end; {while}

Значение T_i соответствует минимальному времени достижимости i -м БПЛА поставленной КТ.

Полученные в работе результаты имеют потенциал для применения в исследовании любой динамической системы, которая описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Это открывает широкие перспективы для автоматизации решения множества задач математического моделирования.

5.3 Выводы по пятому разделу

В работе рассматривается проблема выбора цели группой беспилотных летательных аппаратов с использованием роевого подхода и интервального анализа, подкрепленного компьютерной алгеброй. Группа БПЛА управляется из центра управления полетами, который отправляет всем аппаратам пространственные координаты конечной точки и требуемое время достижения. Каждый БПЛА самостоятельно решает задачу достижимости КТ, учитывая свои технические характеристики и текущее местоположение. Этот процесс параллельный и осуществляется в реальном времени.

Информация о возможности достижения КТ каждым БПЛА передается обратно в ЦУП, который, исходя из дополнительных критериев, определяет, какой беспилотный аппарат (или подгруппа) должен выполнить задачу.

С использованием интервальной математики был разработан критерий достижимости КТ каждым БПЛА. Роевой подход позволил определить список беспилотных аппаратов, способных выполнить поставленную задачу. Этот список может быть пустым в случае, если выбранная КТ недостижима ни для одного из имеющихся БПЛА.

Для разработки программного обеспечения была использована библиотека интервальной математики. Предложенный подход может быть применен для исследования различных технических систем, что подтверждает его универсальность и значимость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе достигнуты следующие теоретические и практические результаты:

1) Решена задача исследования управляемости математической модели беспилотного летательного аппарата (БПЛА) на основе интервальной математики. Были изучены свойства этой модели, и разработан эффективно проверяемый критерий управляемости динамики.

2) Разработано программное обеспечение с использованием компьютерной алгебры, которое упрощает процесс получения линейных моделей, позволяя более эффективно проводить анализ и проектирование управления. Этот инструмент особенно полезен для сложных инженерных приложений, где точные линейные приближения имеют решающее значение для разработки стратегий управления.

3) Определена концепция интервальной устойчивости и формулируются критерии устойчивости для линейных интервальных систем. Кроме того, было проведено сравнение различных методов построения интервалов характеристических полиномов на основе заданной интервальной матрицы. Анализ предоставляет информацию о преимуществах и ограничениях различных подходов, что облегчает выбор наиболее эффективной техники для обеспечения устойчивости системы. Полученные результаты были применены для исследования устойчивости динамики БПЛА.

4) Разработаны алгоритмы и программное обеспечение для определения оптимальных стратегий управления динамикой БПЛА. Эти решения используют численные методы и методы оптимизации. Разработанное программное обеспечение позволяет выполнять вычисления управляющих траекторий в реальном времени с учетом ограничений системы, внешних возмущений и целей миссии. Этот подход способствует улучшению автономности БПЛА, стабильности и адаптивности в динамичных и неопределенных условиях.

5) Разработан алгоритм выбора цели группой беспилотных летательных аппаратов на основе роевого подхода с использованием интервального анализа и компьютерной алгебры.

6) Создана библиотека интервальных функций, на основе которой реализовано прикладное программное обеспечение, обеспечивающее проверку выполнения критерия управляемости.

Основные результаты работы опубликованы в соответствующих работах [80, 83-87, 93-97, 107-110].

Таким образом, данная работа содержит как теоретическую базу определения оптимального управления, так и практически применимый алгоритм, который применим для эффективного управления различными динамическими системами, включая БПЛА.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Беспилотный комплекс М5 AGRO [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://alb.aero/catalog/bpla-samoletnogo-tipa/bespilotnyy-kompleks-m5-agro/> [Дата обращения: 10 марта 2025].
2. Зубарев, Ю.Н. Использование беспилотных летательных аппаратов в сельском хозяйстве [Текст] / Ю.Н.Зубарев //Вестник ПФИЦ. – 2019. – №2. – С. 47 - 51. doi: 10.7242/2658-705X/2019.2.5.
3. Мелихова, Е.В. Применение беспилотных летательных аппаратов в аграрном производстве [Текст] / Е.В. Мелихова //Международный журнал прикладных наук и технологий «Integral». – 2019. – №3. – С. 206-211.
4. Бузмаков, С.А. Подготовка и применение материалов аэрофотосъемки для изучения лесов [Текст] / С.А. Бузмаков, П.Ю.Санников, Д.Н. Андреев // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2016. – Т.18. – №2(2). – С. 313-317.
5. Никифиров, А.А. Анализ зарубежных беспилотных летательных аппаратов, применяемых в лесном секторе [Текст] / А.А.Никифиров, В.А. Мунимаев //Труды лесоинженерного факультета ПетрГУ. – 2010. – С.97-99.
6. Скуднева, О.В. Беспилотные летательные аппараты в системе лесного хозяйства России [Текст] / О.В. Скуднева // Лесной журнал. – 2014. – № 6. – С. 150-153.
7. Беспилотник для профессионального использования FLYOX I [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://www.aeroexpo.com.ru/prod/singular-aircraft/product-180899-70066.html> [Дата обращения: 10 марта 2025].
8. Фархутдинов, А.М. Мониторинг эксплуатации термальных подземных вод с помощью беспилотного летательного аппарата на примере Ханкальского месторождения [Текст] / А.М. Фархутдинов, С.В. Черкасов, А.А. Шаипов, Д.П. Рыкованов, И.Х. Гучигов //Вестник Академии наук РБ. – 2017. – Т.23. – № 2 (86). – С. 75-82.
9. Классификация БПЛА по летным характеристикам [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://docs.geoscan.ru/pioneer/database/const-module/classification/classification.html> [Дата обращения: 10 марта 2025].
10. Логинов, А.А. Актуальность использования беспилотных летательных аппаратов [Текст] / А.А. Логинов // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2015. – Т.1. – С. 704-705.
11. Куатов, Б.Ж. История развития беспилотных летательных аппаратов [Текст] / Б.Ж.Куатов, Т.З.Макаев // Труды Международного симпозиума «Надежность и качество». – 2017. – Т. – С. 137-139.
12. Грищенко, Г.А. Правовое регулирование беспилотных летательных аппаратов Российский подход и мировая практика [Текст] / Г.А. Грищенко //Вестник университета имени О.Е. Кутафина (МГЮА). – 2019. – С. 129-136 doi: 10.17803/2311-5998.2019.64.12.129-136.

13. Хуснутдинов, Т.Д. Перспективы использования беспилотных летательных аппаратов в инновационных проектах [Текст] / Т.Д.Хуснутдинов, А.В. Щербакова, А.П. Комарова, Е.В. Рублевская, А.Ю. Решетников // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2017. – Т.3. – С. 139-141.
14. Долгих, А.А. Сравнительный анализ военных беспилотных летательных аппаратов [Текст] / А.А. Долгих, Е.П. Олейников // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2020. – Т.1. – С. 67-69.
15. Первый казахстанский беспилотник "Шагала-М" успешно завершил испытания [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://ru.sputnik.kz/20230601/bystree-vyshe-silnee-kazakhstanskiy-bpla-uspeshno-proshel-ispytaniya-35489706.html> [Дата обращения: 10 марта 2025].
16. Казахстан представил 4 вида дронов, собранных совместно с Китаем [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://ru.sputnik.kz/20230823/kazakhstan-predstavil-4-vida-dronov-sobrannykh-sovmestno-s-kitaem-37879281.html#pv=g%3D37879281%2Fp%3D37882962> [Дата обращения: 10 марта 2025].
17. Yang, T. Self-Organization Drone-Based Unmanned Aerial Vehicles (UAV) Networks [Текст] / T. Yang, C. H. Foh, F. Heliot, C. Y. Leow, P. Chatzimisios // ICC 2019 - 2019 IEEE International Conference on Communications (ICC), Shanghai, China – 2019. – P. 1-6, doi: 10.1109/ICC.2019.8761876.
18. Gharibi, M. Internet of Drones [Текст] / M.Gharibi, R. Boutaba, S.L. Waslander // IEEE Access. – 2016. – vol. 4. – P. 1148-1162, doi: 10.1109/ACCESS.2016.2537208.
19. Mallick, T. C. Design & implementation of an UAV (Drone) with flight data record [Текст] / T.C. Mallick, M.A.I. Bhuyan, M.S. Munna // International Conference on Innovations in Science, Engineering and Technology (ICISSET), Dhaka, Bangladesh. – 2016. – P. 1-6, doi: 10.1109/ICISSET.2016.7856519.
20. Бугакова, Т.Ю., Волкодав А.С. Разработка модели программно-аппаратного комплекса системы мониторинга техногенных объектов на базе Arduino [Текст] / Т.Ю. Бугакова, А.С. Волкодав // XII Международный научный конгресс и выставка «ИНТЕРЭКСПО ГЕО-СИБИРЬ-2016». – 2016. – Т. 1. – С. 132-137.
21. Kulbacki, M. Survey of Drones for Agriculture Automation from Planting to Harvest [Текст] / M.Kulbacki, J.Segen, W.Kniec, R.Klempous, K.Kluwak, J.Nikodem, J.Kulbacka, A.Serester // 2018 IEEE 22nd International Conference on Intelligent Engineering Systems (INES). Las Palmas de Gran Canaria, Spain, – 2018. – P. 000353-000358, doi: 10.1109/INES.2018.8523943.
22. Pauner, C. Drones. Current challenges and standardisation solutions in the field of privacy and data protection [Текст] / C. Pauner, I. Kamara, J. Viguri // 2015 ITU Kaleidoscope: Trust in the Information Society (K-2015), Barcelona, Spain. – 2015. – P. 1-7, doi: 10.1109/Kaleidoscope.2015.7383633.
23. Yu, Y. LiveBox: A Self-Adaptive Forensic-Ready Service for Drones [Текст] / Y. Yu, D. Barthaud, B.A. Price, A.K. Bandara, A. Zisman, B. Nuseibeh //

IEEE Access. – 2019. – vol.7. – P. 148401-148412, doi: 10.1109/ACCESS.2019.2942033.

24. Celtek, S. A. Design and Simulation of the Hierarchical Tree Topology Based Wireless Drone Networks [Текст] / S.A. Celtek, A. Durdu, E. Kurnaz // International Conference on Artificial Intelligence and Data Processing (IDAP), Malatya, Turkey. – 2018. – P. 1-5, doi: 10.1109/IDAP.2018.8620755.

25. Alwateer, M. Enabling Drone Services: Drone Crowdsourcing and Drone Scripting [Текст] / M. Alwateer, S. W. Loke, N. Fernando // IEEE Access. – 2019. – vol. 7. – P.110035-110049, doi: 10.1109/ACCESS.2019.2933234.

26. Doran, H. D. Conceptual Design of Human-Drone Communication in Collaborative Environments [Текст] / H.D. Doran, M. Reif, M. Oehler, C. Stöhr, P. Capone // 50th Annual IEEE/IFIP International Conference on Dependable Systems and Networks Workshops (DSN-W), Valencia, Spain. – 2020. – P.118-121, doi: 10.1109/DSN-W50199.2020.00030.

27. Park, J. A comparison of convolutional object detectors for real-time drone tracking using a PTZ camera [Текст] / J. Park, D. H. Kim, Y. S. Shin, S.-h. Lee // 17th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS), Jeju, Korea (South). – 2017. – P. 696-699, doi: 10.23919/ICCAS.2017.8204318.

28. Автоматизированное проектирование систем автоматического управления [Текст]: монография / Я.Я.Алексанкин, А.Э.Бржозовский, В.А.Жданов и др.; Под ред.В.В.Солодовникова. – М.: Машиностроение, 1990. – 334 с. ISBN 5-217-00999-3.

29. Ляпунов, А.М. Общая задача об устойчивости движения. – Череповец: Меркурий-Пресс, 2000. – 386 с.

30. Анализ и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления / Под ред. А.А. Воронова, И.А. Огурка – М.: Наука, 1984. – 344 с.

31. Болнокин, В.Е. Анализ и синтез систем автоматического управления на ЭВМ. Алгоритмы и программы: Справочник. [Текст] / В.Е. Болнокин, П.И. Чинаев. – М.: Радио и связь, 1991. – 256 с.

32. Крутько, П.Д. Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем / П.Д. Крутько, А.И. Максимов, Л.М. Скворцов; Под ред. П.Д.Крутько. – М.: Радио и связь, 1988. – 306 с.

33. Дэвенпорт, Дж. Компьютерная алгебра. [Текст] / Дж.Дэвенпорт, И.Сира, Э.Турнье – М.: Мир, 1991. – 352 с.

34. Горюшкин, А.П. Абстрактная и компьютерная алгебра / А.П. Горюшкин, – М.: Юрайт, 2022. – 691 с.

35. Калман, Р.Е. Об общей теории систем управления [Текст] / Р.Е. Калман, // Труды 1-го Международного конгресса ИФАК. – М.: Издательство АН СССР. – 1961. – Т. 2. – С. 521-546.

36. Танг, Т.Л. Системный анализ и оптимизация режимов полнота для управления летательным аппаратом [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук, спец. 05.13.01/ Танг Тхань Ламю – М., 2015. – 32 с.

37. Красовский, Н.Н. Проблемы управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости динамических систем [Текст] / Н.Н. Красовский // Труды

II Всесоюзного съезда по теории и прикладной механике. Москва. – 1965. – Выпуск 1. – С. 77-93.

38. Семенов, В.Н. Об управляемости нелинейных динамических систем [Текст] / В.Н. Семенов // Кибернетические и вычислительные технологии: Республиканский межведомственный сборник – Киев: Наукова думка. – 1971. – Выпуск 8. – С. 34- 40.

39. Gershwin, S.B. A controllability theory for nonlinear systems [Текст] / S.B. Gershwin, D.H. Jacobson // IEEE Trans. Automat. Control. – 1971. – V. 16. – № 1. – P.25-36.

40. Hunt, L. R. Controllability of nonlinear systems in two dimensions [Текст] / L. R. Hunt // Math. Syst. Theory. – 1980. – V. 13. – №4. – P. 361-376.

41. Федоров, А.Ю. Условия управляемости нелинейных динамических систем [Текст] / А.Ю. Федоров // Автоматика и телемеханика. – 1984. – № 4. – С. 60-71.

42. Емельянов, С.В. Критерии управляемости нелинейных систем при фазовых ограничениях [Текст] / С.В. Емельянов, С.К. Коровин, И.Г. Мамедов, С.В. Никитин // ДАН СССР. – 1986. – Т. 290. – № 1. – С. 18-22.

43. Ковалев, А.М. Критерий управляемости и достаточные условия стабилизируемости динамических систем [Текст] / А.М. Ковалев // Прикладная математика и механика. – 1995. – Т. 59. – № 3. – С. 401-409.

44. Мастерков, Ю.В. О глобальной устойчивой управляемости [Текст] / Ю.В. Мастерков // Удмуртский государственный университет. Известия Института математики и информатики. – 1997. – № 1. – С. 67-76.

45. Zhang, W. Sampled-data control for a class of linear time-varying systems [Текст] / W.Zhang, Q.-L. Han, Y.Tang, Y. Liu // Automatica. – 2019. – Vol.103. – P. 126-134.

46. Boarotto, F. Dwell-time control sets and applications to the stability analysis of linear switched systems [Текст] / F. Boarotto, M. Sigalott. // Journal of Differential Equations. – 2020. – Vol. 268, Issue 4. – P. 1345-1378.

47. Ayala, V. Control sets of linear systems on semi-simple Lie groups [Текст] / V.Ayala, A.Da Silva, P. Jouan, G. Zsigmond // Journal of Differential Equations. – 2020. – Vol.269, Issue 1. – P. 449-466.

48. Si, Y. Controllability of linear and nonlinear systems governed by Stieltjes differential equations [Текст] / Y. Si, J.Wang, M. Fečkan // Applied Mathematics and Computation. – 2020. – Vol. 376. – P.125-139.

49. Ikeda, T. Time-optimal hands-off control for linear time-invariant systems [Текст] / T.Ikeda, M. Nagahara. // Automatica. – 2019. – Vol. 99. – P. 54-58.

50. Cacace, F. Feedback polynomial filtering and control of non-Gaussian linear time-varying systems [Текст] / F.Cacace, F.Conte, M.d'Angelo, A.Germani // Systems & Control Letters. – 2019. – Vol.123. – P. 108-115.

51. Зубов, В.И. Динамика управляемых систем. / В.И. Зубов. – 2-е изд., перераб. и доп.– СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2004. – 376 с.

52. Зубов, В.И. Лекции по теории управления. учебное пособие / В. И. Зубов. – 2-е изд., испр. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 494 с.

53. Валеев, К.Г. Бесконечные системы дифференциальных уравнений [Текст] / К.Г. Валеев, О.А. Жаутыков – Алма-Ата: Наука, 1974. – 415 с.

54. Джумабаев, Д.С. Краевые задачи с параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02: защищена 1980 г. / Джумабаев Дулат Сыздыкбекович. – Алма-Ата, 1980. – 88 с.

55. Айсагалиев, С.А. Анализ и синтез автономных нелинейных систем автоматического управления / С.А. Айсагалиев – Алма-Ата: Наука КазССР, 1980. – 244 с.

56. Калимолдаев, М.Н. Устойчивость систем автоматического управления при постоянно действующих возмущениях. [Текст] / М.Н. Калимолдаев, Т.Н. Бияров – Алматы: Министерство печати и массовой информации РК, 1995. – 126 с.

57. Калимолдаев, М.Н. К управляемости и устойчивости нелинейных многомерных фазовых систем / М.Н. Калимолдаев – Алматы: Наука, 1996. – 72 с.

58. Мурзабеков, З.Н. Построение ограниченного управления для одного класса нелинейных систем с коэффициентами, зависящими от состояния объекта управления [Текст] / З.Н. Мурзабеков, Г.А. Мирзахмедова // Проблемы математического анализа. Новосибирск. – 2020. – Вып.104. – С.69-74.

59. Мазаков, Т.Ж. Применение интервальной математики к анализу управляемости систем [Текст] / Т.Ж. Мазаков, Ш.А.Джомартова // Математическое и компьютерное моделирование систем и процессов. Гродно: ГрГУ. – 2013. – С.110-114.

60. Каюмов, О.Р. Глобально управляемые механические [Текст]: автореф. дис. ... доктор. физ-мат. наук: 01.02.01 / Каюмов Олег Рашидович. – Тараз, 2007. – 32 с.

61. Хрящев, С.М. Модели и методы исследования управляемости систем с регулярным и хаотическим поведением [Текст]: автореф. дис. ... доктор. физ-мат. наук: 05.13.18 / Хрящев Сергей Михайлович. – Санкт-Петербург, 2006. – 34 с.

62. Квитко, А.Н. Методы решения краевых задач для управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений и их применение при решении задач управления движением центра масс летательного аппарата [Текст]: автореф. дис. ... доктор. физ-мат. наук: 01.01.11 / Квитко Александр Николаевич. – Санкт-Петербург, 1992. – 30 с.

63. Гладкова, И.В. Управляемость механических систем с ограничениями на управление и фазовый вектор с приложением к динамике твердого тела [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ-мат. наук: 01.02.01 / Гладкова И.В. – Донецк, 1993. – 10 с.

64. Семенов, Ю.М. Конструктивные методы анализа множеств управляемости и достижимости динамических систем [Текст]: автореф. дис. ... док. физ-мат. наук: 01.01.02 / Семенов Юрий Матвеевич. – Чебоксары, 2010. – 32 с.

65. Сачков, Ю.Л. Управляемость и оптимальное управление для инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах [Текст]: автореф. дис. ... док. физ-мат. наук: 01.01.02 / Сачков Юрий Леонидович. – Москва, 2007. – 23 с.
66. Десяев, Е.В. Математическое моделирование динамики управляемых систем [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ-мат. наук: 05.13.18 / Десяев Евгений Васильевич. – Саранск, 2012. – 19 с.
67. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Л.С. Понтрягин – М.: Наука, 1974. – 332 с.
68. Верлань, А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков– Киев: Наукова Думка, 1986. – 543 с.
69. Джомартова, Ш.А. Практические интервальные вычисления [Текст] / Ш.А. Джомартова // Вестник НАН РК. – 2002. – №2. – С.41-46.
70. Борисов О.И. Методы управления робототехническими приложениями [Текст]: учеб. пособие / О.И. Борисов, В.С. Громов, А.А. Пыркин.– СПб.: Университет ИТМО, 2016. – 108 с.
71. Булгаков, А.Г. Промышленные роботы. Кинематика, динамика, контроль и управление [Текст]: учеб. пособие / А.Г. Булгаков, В.А. Воробьев. – М.: Солон-Пресс, 2011. – 488 с.
72. Колемаев, В.А. Математическая экономика / В.А. Колемаев. – М.: Юнити-Дана, 2002. – 399 с.
73. Христиановский, В.В. Экономико-математические методы и модели: теория и практика [Текст]: учеб. пособие / В.В. Христиановский, В.П. Щербина. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 335 с.
74. Теуш, Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст]: курс для будущих инженеров / Б.Л. Теуш– М.: Ленанд, 2022. – 504 с.
75. Борисов, В.Г. Прикладные задачи теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Механическое движение [Текст]: учеб. пособие/ В.Г. Борисов.–Кемерово: Кемеровский гос. университет, 2015.–130 с
76. Boarotto, F. Dwell-time control sets and applications to the stability analysis of linear switched systems [Текст] / F. Boarotto, M. Sigalott // Journal of Differential Equations. – 2020. – Vol.268, Issue 4. – P. 1345-1378.
77. Ayala, V. Control sets of linear systems on semi-simple Lie groups [Текст] / V. Ayala, A.Da Silva, Ph. Jouan, G. Zsigmond // Journal of Differential Equations. – 2020. – Vol. 269, Issue 1. – P. 449-466.
78. Zhang W. Sampled-data control for a class of linear time-varying systems [Текст] / W.Zhang, Q-L. Han, Y. Tang, Y. Liu // Automatica. – 2019. – Vol.103.– P.126-134.
79. Mazakov, T. The Stability Interval of the Set of Linear System [Текст] / T.Mazakov, W.Wójcik, Sh.Jomartova, N.Karymsakova, G.Ziyatbekova, A. Tursynbai // INTL Journal of Electronics and Telecommunications. – 2021. – 67(2). – P.155-161. doi: 10.24425/ijet.2021.135958.
80. Mazakova, A. Controllability of an unmanned aerial vehicle [Текст] / A. Mazakova, S. Jomartova, T. Mazakov, T. Shormanov, B. Amirkhanov // IEEE 7th

International Energy Conference (ENERGYCON). – 2022. – P. 1-5, doi: 10.1109/ENERGYCON53164.2022.9830244.

81. Щеглова, А.А. Об управляемости нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений [Текст] / А.А. Щеглова // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация: материалы межд. конф. – Минск, 2008. – С.166-168.

82. Молчанов, А.М. Об устойчивости нелинейных систем / А.М. Молчанов. – Пущино: Институт математических проблем биологии РАН, 2013. – 103 с.

83. Mazakova, A. Automated Linearization of a System of Nonlinear Ordinary Differential Equations [Текст] / A.Mazakova, Sh.Jomartova, W. Wójcik, T.Mazakov, G.Ziyatbekova // INTL Journal of electronics and Telecommunications. – 2023. - Vol. 69, № 4. – P. 655-660. doi: 10.24425/ijet.2023.147684.

84. Aliaskar, M. Development of an analytical computation system and its application for automation of equations derivation in robotics systems [Текст] / M. Aliaskar, Sh. Jomartova, A. Mazakova, T.Mazakov, G.Ziyatbekova // International Conference on Electrical Facilities and informational technologies (ICEF 2023), Almaty. – 2023. – P.376-380.

85. Мазакова, А.Т. Автоматизация процесса линеаризации нелинейной модели, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями [Текст] / А.Т. Мазакова, Ш.А. Джомартова, Т.Ж. Мазаков, Г.З. Зиятбекова, А.Т. Досаналиева // Вестник КазУТБ, Астана. – 2023. – № 1(18). – С.7-23.

86. Джомартова, Ш.А. Автоматизация вывода уравнений математической модели робототехнической системы [Текст] / Ш.А. Джомартова, А.Т. Мазакова, К.Б. Калибай // Вестник КазУТБ, Нур-Султан. – 2021. – № 3(12). – С. 7-14.

87. Aliaskar, M. Development of an analytical computation system and its application for automation of equations derivation in robotics systems [Текст] / M.Aliaskar, Sh.Jomartova, A.Mazakova, T. Mazakov, G. Ziyatbekova // International Conference on Electrical Facilities and informational technologies (ICEF 2023), Almaty. - 2023. – P.376-380.

88. Аладьев, В.З. Программирование и разработка приложений в Maple [Текст] / В.З. Аладьев, В.К. Бойко, Е.А. Ровба. – Гродно: ГрГУ; Таллинн: Межд. Акад. Ноосферы, 2007. – 458 с.

89. Лазарев, Ю. Моделирование процессов и систем в Matlab / Ю.Лазарев. – СПб.: Питер: Изд. группа BHV, 2005 – 512 с.

90. Дьяконов, В.П. Системы компьютерной алгебры Derive / В.П. Дьяконов. – М.: Солон-Пресс, 2002. – 320с.

91. Грошева, М.В. История использования аналитических вычислений в задачах механики [Текст] / М.В. Грошева, Г.Б. Ефимов, В.А. Самсонов. – М.: ИПМ имени Келдыша РАН, 2005. – 87 с.

92. Дьяконов, В.П. Энциклопедия компьютерной алгебры / В.П. Дьяконов. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 1264 с.

93. Mazakova, A.T. Solution of the thermal conductivity equation of a rod with a square section by casting to a system of ordinary differential equations [Текст] / A.T. Mazakova, K.B. Begaliyeva, T.Zh. Mazakov, Sh.A. Jomartova, G.Z. Ziyatbekova // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. al-Farabi Kazakh National University, Series Information Technology, Алматы, NAS RK. – 2022. – № 3 (343). – P.153-163.
94. Kalimoldayev, A.M. Digital definition of optimal inventory management [Текст] / A.M. Kalimoldayev, A.T. Mazakova, S.A. Jomartova, T.Z. Mazakov, G.Z. Ziyatbekova // In: Sergi, B.S., Popkova, E.G., Ostrovskaya, A.A., Chursin, A.A., Ragulina, Y.V. (eds) Ecological Footprint of the Modern Economy and the Ways to Reduce It. Advances in Science, Technology & Innovation. Springer, Cham. – 2024. – P. 111-115. doi.org/10.1007/978-3-031-49711-7_19.
95. Mazakova, A.T. Digital determination of the thermal conductivity of a square bar by reduction to a system of integral equations [Текст] / A.T. Mazakova, S.A. Jomartova, T.Z. Mazakov, G.Z. Ziyatbekova, K.B. Begaliyeva // In: Sergi, B.S., Popkova, E.G., Ostrovskaya, A.A., Chursin, A.A., Ragulina, Y.V. (eds) Ecological Footprint of the Modern Economy and the Ways to Reduce It. Advances in Science, Technology & Innovation. Springer, Cham. – 2024. – P. 167-171. doi.org/10.1007/978-3-031-49711-7_29.
96. Kalimoldayev, A.M. Application of digital technologies for ranking loan borrowers [Текст] / A.M. Kalimoldayev, A.T. Mazakova, A.D. Burgegulov, A.A. Sametova, D.K. Mukhayev // In: Sergi, B.S., Popkova, E.G., Ostrovskaya, A.A., Chursin, A.A., Ragulina, Y.V. (eds) Ecological Footprint of the Modern Economy and the Ways to Reduce It. Advances in Science, Technology & Innovation. Springer, Cham. – 2024. – P. 105-109. doi.org/10.1007/978-3-031-49711-7_18.
97. Mazakova, A.T. Mathematical Modeling and Development of an Automated System for Searching Ring Structures in Geology [Текст] / A.T. Mazakova, Sh.A. Jomartova, T.Zh. Mazakov, G.Z. Ziyatbekova, A.A. Sametova // News of the national academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Geology and Technical Sciences. – 2023. – №1. – P. 154-165.
98. Четаев, Н.Г. Устойчивость движения / Н.Г. Четаев – М.: ГИТЛ, 1955. – 207 с.
99. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов – М.: Наука, 1973. – 632 с.
100. Джомартова, Ш.А. Применение интервальных вычислений в анализе устойчивости механических систем [Текст] / Ш.А.Джомартова // Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика. – 2002. – №1(29). – С.85-88.
101. Нечаев, В.В. Некоторые аспекты группового управления многокомпонентными системными объектами на основе биоинспирированных алгоритмов [Текст] / В.В. Нечаев, Д.В. Миняйло // International Journal of Open Information Technologies. – 2019. – vol.7, №.6. – С.94-100.

102. Мунасыпов, Р.А. Групповое управление беспилотными летательными аппаратами на основе метода пространства относительных состояний [Текст] / Р.А.Мунасыпов, Т.З. Муслимов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2018. – 19(2). – С.120-125. doi: 10.17587/mau.19.120-125
103. Wang, Z. Multi-UAV reconnaissance task allocation for heterogeneous targets using an opposition-based genetic algorithm with double-chromosome encoding [Текст] / Z.Wang, L.Liu, T.Long, Y.Wen // Chinese Journal of Aeronautics. – 2018. – 31(2). – P. 339-350. doi: 10.1016/j.cja.2017.09.005.
104. Hu, G. MAHACO: Multi-algorithm hybrid ant colony optimizer for 3D path planning of a group of UAVs [Текст] / G. Hu, F.Huang, B.Shu, G. Wei // Information Sciences. – 2025. – 694. – N. 121714, doi: 10.1016/j.ins.2024.121714
105. Королев, Л.Ю. Алгоритмы фильтрации параметров движения группы беспилотных летательных аппаратов [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01 / Королев Леонид Юрьевич. – Пенза, 2021. – 23 с.
106. Назаренко, Т.И. Введение в интервальные методы вычислительной математики [Текст] / Т.И. Назаренко, Л.В. Марченко–Иркутск: Издательство Иркутского университета, 1982. – 108 с.
107. Mazakova, A. Target selection by a group of unmanned aerial vehicles based on a swarm approach [Текст] / A. Mazakova, V. Zhmud, Sh. Jomartova, T.Mazakov // International Conference on Electrical Facilities and informational technologies (ICEF 2023),Almaty. – 2023. – P.242-246.
108. Мазакова, А.Т. Параметрическая устойчивость беспилотного летательного аппарата [Текст] / А.Т. Мазакова, Ш.А. Джомартова, Т.Ж. Мазаков, Г.Ч. Тойкенов, М.С.Алиаскар // Вестник КазУТБ, Астана. – 2024. – № 3(24). – С. 43-51.
109. Mazakova, A.T. Optimal Control of An Unmanned Aerial Vehicle [Текст] / A.T. Mazakova, Sh.A. Jomartova, T.Zh. Mazakov, G.Ch. Toikenov, M.S. Aliaskar // Вестник КазУТБ, Астана. – 2024. – № 3(24). – С. 64-71.
110. Мазакова, А.Т. Автоматизация процесса линеаризации нелинейной модели, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями [Текст] / А.Т. Мазакова, Ш.А. Джомартова, Т.Ж. Мазаков, Г.З. Зиятбекова, А.Т. Досаналиева // Вестник КазУТБ, Астана. – 2023. – № 1(18). – С.7-23.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(Сертификат научной стажировки)

Сертификат
подтверждает, что
Мазакова Айгерим Талгатовна

докторант 2-го года обучения «факультета информационных технологий КазНУ имени аль-Фараби», обучающаяся по образовательной программе «Интеллектуальные системы управления» в период с 2 марта 2023 г. по 20 апреля 2023 г., прошла научную стажировку в очном формате в объеме 280 часов в Автономной некоммерческой организации дополнительного профессионального образования «Университет госзакупок» (АНО ДПО «Университет Госзакупок») под руководством профессора, доктора технических наук, Жмудь Вадима Аркадьевича.

Стажер Мазакова Айгерим Талгатовна самостоятельно разработала алгоритм управления группой БПЛА, подготовила научный обзор по теме диссертационной работы и выполнила контрольную работу на оценку «отлично».

Директор АНО ДПО «Университет Госзакупок»

Руководитель стажировки:
Профессор, д.т.н., доцент

Новосибирск - 2023



ПРИЛОЖЕНИЕ Б

(Свидетельства о внесении сведений в государственный реестр прав на объекты, охраняемые авторским правом)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ

РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН

СВИДЕТЕЛЬСТВО
О ВНЕСЕНИИ СВЕДЕНИЙ В ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РЕЕСТР
ПРАВ НА ОБЪЕКТЫ, ОХРАНЯЕМЫЕ АВТОРСКИМ ПРАВОМ

№ 45318 от «2» мая 2024 года

Фамилия, имя, отчество, (если оно указано в документе, удостоверяющем личность) автора (ов):
Мазақова Әйгерім Талғатқызы, Мазаков Талғат Жақұпович, Джомартова Шолпан Абдразақовна

Вид объекта авторского права: программа для ЭВМ

Название объекта: Определение устойчивости БПЛА

Дата создания объекта: 27.04.2024





Дополнительные сведения: <https://www.kazpatent.kz/my/own/works>
"Авторский кодекс" Республики Казахстан: <https://copyright.kazpatent.kz>

Подлинность документа возможно проверить на сайте kazpatent.kz
в разделе «Авторское право» <https://copyright.kazpatent.kz>

Подписано ЭЦП

Е. Оспанов

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ



РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН

СВИДЕТЕЛЬСТВО

О ВНЕСЕНИИ СВЕДЕНИЙ В ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РЕЕСТР
ПРАВ НА ОБЪЕКТЫ, ОХРАНЯЕМЫЕ АВТОРСКИМ ПРАВОМ

№ 45324 от «2» мая 2024 года

Фамилия, имя, отчество, (если оно указано в документе, удостоверяющем личность) автора (ов):
Мазакова Ойгерім Талғатқызы, Мазаков Талғас Жақұпұлыч, Джомартова Шолпан Абдразақовна

Вид объекта авторского права: программа для ЭВМ

Название объекта: Определение управляемости БП/А

Дата создания объекта: 27.04.2024



Документ опубликован на сайте <http://www.kazpatent.kz> в разделе
"Авторское право" в государственном реестре по адресу <https://copyright.kazpatent.kz>

Подлинность документа возможно проверить на сайте [kazpatent.kz](http://www.kazpatent.kz)
в разделе "Авторское право" по адресу <https://copyright.kazpatent.kz>

Подписано ЭЦП

Е. Оспанов

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ



РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН

СВИДЕТЕЛЬСТВО

О ВНЕСЕНИИ СВЕДЕНИЙ В ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РЕЕСТР ПРАВ НА ОБЪЕКТЫ, ОХРАНЯЕМЫЕ АВТОРСКИМ ПРАВОМ

№ 45572 от «10» мая 2024 года

Фамилия, имя, отчество, (если оно указано в документе, удостоверяющем личность) автора (авторов):

Мазақова Әйгерім Талғатқызы, Джомартова Шолпан Абдразақовна, Мазақов Талғат Жақұпович

Вид объекта авторского права: программа для ЭВМ

Название объекта: Определение оптимального управления БПЛА

Дата создания объекта: 05.05.2024



Копия удостоверения <https://www.kazpatent.kz/mg/svedeniya>
"Авторские права" вносится в реестр <https://copyright.kazpatent.kz>

Подлинность документа возможно проверить на сайте [kazpatent.kz](https://www.kazpatent.kz)
в разделе «Авторские права» <https://copyright.kazpatent.kz>

Подписано ЭЦП

Е. Оспанов

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ



РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН

АВТОРЛЫҚ ҚҰҚЫҚПЕН ҚОРҒАЛАТЫН ОБЪЕКТІЛЕРГЕ ҚҰҚЫҚТАРДЫҢ
МЕМЛЕКЕТТІК ТІЗІЛІМГЕ МӘЛІМЕТТЕРДІ ЕНГІЗУ ТУРАЛЫ

КУӘЛІК

2019 жылғы «12» қыркүйек № 5290

Автордың (лардың) жөні, аты, әжесінің аты (егер ол жеке басын куәландыратын құжатта көрсетілсе):

ЗИЯТБЕКОВА ГҮЛЗАТ ЗИЯТБЕКҚЫЗЫ, МАЗАКОВА ӘЙГЕРІМ ТАЛҒАТҚЫЗЫ, ШОРМАНОВ ТИМУР
СЕРИКХАНОВИЧ, АМИРХАНОВ БАУЫРЖАН САЙТАШЕВИЧ, ЖОЛМАГАМБЕТОВА БАХЫТГҮЛ
РЫСБЕКОВНА, ӘЛІАСКАР МАҒЖАН СҮНДЕТҮЛЫ

Авторлық құқық объектісі: ЭЕМ-ге арналған бағдарлама

Объектінің атауы: Комплекс программ трехмерной графики «3D-MAT»

Объектіні жасаған күні: 17.06.2019



Құжат тексерілуіне: <http://www.kazpatent.kz/>, сайттың
"Авторлық құқық" бөлімінде тексеруге болады. <https://copyright.kazpatent.kz/>

Подлинность документа возможно проверить на сайте [kazpatent.kz](http://www.kazpatent.kz/)
в разделе «Авторское право» https://copyright.kazpatent.kz

Подписано ЭЦП

Оспанов Е.К.

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ



РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН

АВТОРЛЫҚ ҚҰҚЫҚПЕН ҚОРҒАЛАТЫН ОБЪЕКТІЛЕРГЕ ҚҰҚЫҚТАРДЫҢ
МЕМЛЕКЕТТІК ТІЗІЛІМГЕ МӘЛІМЕТТЕРДІ ЕНГІЗУ ТУРАЛЫ

КУӘЛІК

2020 жылғы «17» қаңтар № 7576

Автордың (лардың) жөні, аты, әжесінің аты (егер ол жеке басын куәландыратын құжатта көрсетілсе):
ЗИЯТБЕКОВА ГҮЛЗАТ ЗИЯТБЕКҚЫЗЫ, МАЗАКОВА ӘЙГЕРІМ ТАЛҒАТҚЫЗЫ, МАЗАКОВ
ТАЛҒАТ ЖАҚСҰНОВИЧ, ДЖОМАРТОВА ШОЛПАН АБДРАЗАКОВНА, КАРЫМСАКОВА НҮРГҮЛЬ
ІЛІТАЕВНА, АМИРХАНОВ БАҰЫРЖАН САЙТАШЕВИЧ, ЖОЛМАҒАМБЕТОВА БАХЫТГҮЛ
РЫСБЕКОВНА

Авторлық құқық объектісі: ЭЕМ-ге арналған бағдарлама

Объектінің атауы: Библиотека интервальных функций

Объектіні жасаған күні: 03.01.2020



Құжат түпнұсқалығын: <http://www.kazpatent.kz/ru/saytтынyn>
"Авторлық құқық" бөлімінде тексеруге болады: <https://copyright.kazpatent.kz>

Подлинность документа возможно проверить на сайте kazpatent.kz
в разделе «Авторское право» <https://copyright.kazpatent.kz>

Подписано ЭЦП

Оспанов Е. К.

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ



РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН

**СВИДЕТЕЛЬСТВО
О ВНЕСЕНИИ СВЕДЕНИЙ В ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РЕЕСТР
ПРАВ НА ОБЪЕКТЫ, ОХРАНЯЕМЫЕ АВТОРСКИМ ПРАВОМ**

№ 7632 от «21» января 2020 года

Фамилия, имя, отчество (если оно указано в документе, удостоверяющем личность) автора (авторов):

Зиятбекова Гулзат Зиятбекқызы, Мазакон Талғат Жакупович, Джомартова Шолпан Абдразақовна, Мазакон Әлгерім Талғатқызы, Карымсакова Нұрғұль Тілетайевна, Тұрсынбай Аңсұлу Тауасарқызы, Саметова Әлгерім Айттарқызы

Вид объекта авторского права: программа для ЭВМ

Название объекта: Система Аналитических Вычислений

Дата создания объекта: 05.01.2020



Курсат танысқанын http://www.kazpatent.kz/nr_saitymyn
"Авторлық құқық" бөлімінде тексеруге болады: <https://copyright.kazpatent.kz>

Полнота документа возможно проверить на сайте [kazpatent.kz](http://www.kazpatent.kz)
в разделе «Авторское право» <https://copyright.kazpatent.kz>

Подписано ЭЦП

Оспанов Е. К.

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ



РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН

АВТОРЛЫҚ ҚҰҚЫҚПЕН ҚОРҒАЛАТЫН ОБЪЕКТІЛЕРГЕ ҚҰҚЫҚТАРДЫҢ
МЕМЛЕКЕТТІК ТІЗІЛІМГЕ МӘЛІМЕТТЕРДІ ЕНГІЗУ ТУРАЛЫ

КУӨЛІК

2023 жылғы «28» шілде № 38164

Автордың (лардың) жөні, аты, әкесінің аты (егер ол жеке басым куәландыратын қаржатта көрсетілсе):
Мазақия Талғат Жакупович, Джомартына Шолпан Абдразақовна, Зиятбекқызы, Зиятбекқызы, Зиятбекқызы,
Мазақова Әйгерім Талғатқызы, Әлиасқар Мағжан Сүлдетұлы, Мирзахмедова Гүлбану Абсаматовна,
Байшопан Назерке, Кульжанова Ақбота Ақылбекқызы

Авторлық құқық объектісі: DEM-ге арналған бағдарлама

Объектінің атауы: Программа построения проекции точки плоскости на заданное множество

Объектінің жасаған күні: 25.07.2023



Күзет енгізілгендіктен <https://www.kazpat.kz/kazpat/kuizet>
"Авторлық құқық" бөлімінде тексеріле береді. <https://copyright.kazpat.kz>

Подлинность документа возможно проверить на сайте [kazpat.kz](https://www.kazpat.kz)
в разделе «Авторское право» <https://copyright.kazpat.kz>

ЭЦҚ қол қойылды

А. Артыкова

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ



РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН

АВТОРЛЫҚ ҚҰҚЫҚПЕН ҚОРҒАЛАТЫН ОБЪЕКТІЛЕРГЕ ҚҰҚЫҚТАРДЫҢ
МЕМЛЕКЕТТІК ТІЗІЛІМГЕ МӘЛІМЕТТЕРДІ ЕНГІЗУ ТУРАЛЫ

КУӘЛІК

2023 жылғы «25» тамыз № 38710

Автордың (ардың) жөні, аты, әкесінің аты (егер тіл жеке басын куәландыратын қажатта көрсетілсе):

Мазақов Талғат Жакупович, Джомартова Шөлпан Абразақовна, Мазақова Баши Мұсаевна, Жәкыпова
Абылай Талғатұлы, Мазақова Әйгерім Талғатқызы, Зиятбекова Гүлшат Зиятбекқызы, Әлиасқар Мағжан,
Сүлейтұлы, Байишолан Назерке, Қулыжанова Ақбота Ақылбековна

Авторлық құқық объектісі: ЗЕМ-ге арналған бағдарлама

Объектінің атауы: Программа построения проекции точки n-мерного пространства на заданное множество

Объектіні жасаған күні: 22.08.2023



Құжат тіркелгені туралы <http://www.kazpatent.kz> сайтының
"Авторлық құқық" бөлімінде тексеруге болады. <https://copyright.kazpatent.kz>

Подлинность документа возможно проверить на сайте [kazpatent.kz](http://www.kazpatent.kz)
в разделе «Авторское право» <https://copyright.kazpatent.kz>

ЭЦҚ қол қойылды

Н. Абулкаиров

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ



РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН

АВТОРЛЫҚ ҚҰҚЫҚПЕН ҚОРҒАЛАТЫН ОБЪЕКТІЛЕРГЕ ҚҰҚЫҚТАРДЫҢ
МЕМЛЕКЕТТІК ТІЗІЛІМГЕ МӘЛІМЕТТЕРДІ ЕНГІЗУ ТУРАЛЫ

КУӘЛІК

2024 жылғы «13» ақпан № 42858

Автордың (лардың) жөні, аты, әкесінің аты (егер ол жеке басын куәландыратын құжатта көрсетілсе):

Мәзікәлі Талғат Жакупович, Бүргегүлді Ақылтай Түйсенбеквич, Дәлімқарова Шолпан Абдразақовна,
Тойбеков Гұмырбек Чакеремович, Майлыбаева Айман Джадгереевна, Зиятбекова Гүлшат Зиятбекқызы,
Мәзікәлі Әйгерім Талғатқызы, Әлімқасар Мәзікәлі Сұлтанұлы, Саметова Айгерім Айдарқызы,
Досаналиева Ақерке Тұрғұлмухамбетовна

Авторлық құқық объектісі: DEM-ге арналған бағдарлама

Объектінің атауы: Программа построения маршрута для эвакуации сотрудников из здания при
возникновении ЧС

Объектіні жасаған күні: 09.02.2024



Құжат тіркелгенін <http://www.kazpatent.kz/copyright/> сайтының
"Авторлық құқық" бөлімінде тексеруге болады. <https://copyright.kazpatent.kz>

Подлинность документа возможно проверить на сайте [kazpatent.kz](http://www.kazpatent.kz)
в разделе «Авторское право» <https://copyright.kazpatent.kz>

ӘЦҚ қол қойылды

Е. Оспанов

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ



РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН

АВТОРЛЫҚ ҚҰҚЫҚПЕН ҚОРҒАЛАТЫН ОБЪЕКТІЛЕРГЕ ҚҰҚЫҚТАРДЫҢ
МЕМЛЕКЕТТІК ТІЗІЛІМГЕ МӘЛІМЕТТЕРДІ ЕНГІЗУ ТУРАЛЫ

КУӘЛІК

2024 жылғы «29» наурыз № 44052

Автордың (лардың) жөні, аты, әкесінің аты (егер ол жеке басын куәландыратын құжатта көрсетілсе):
Мәзікпін Талғат Жакупович, Досаналиева Аерке Тұрсынмұханбетовна, Джамартова Шалпан
Абдразақовна, Мейілібаева Айман Дәккереевна, Зиятбекова Гүлзат Зиятбекқызы, Мәзікпін Әйгерім
Талғатқызы, Әлиасқар Мағжан Сұлтанұлы, Саметова Айгерім Айдарқызы

Авторлық құқық объектісі: DEM-ге арналған бағдарлама

Объектінің атауы: Программа построения маршрутов для оперативной доставки грузов

Объектінің жасалған күні: 25.03.2024



Құжат тексерудің нұсқасы: <http://www.kazpatent.kz/kontolninyi>
"Авторлық құқық" бөліміндегі тіркеу нөмірі: <https://copyright.kazpatent.kz>

Подлинность документа возможно проверить на сайте [kazpatent.kz](http://www.kazpatent.kz)
в разделе «Авторское право» <https://copyright.kazpatent.kz>

ЭЦҚ қол қойылды

Е. Оспанов



Scopus

Поиск Источники Scopus

Эта запись об авторе сгенерирована Scopus

Mazakova, Aigerim

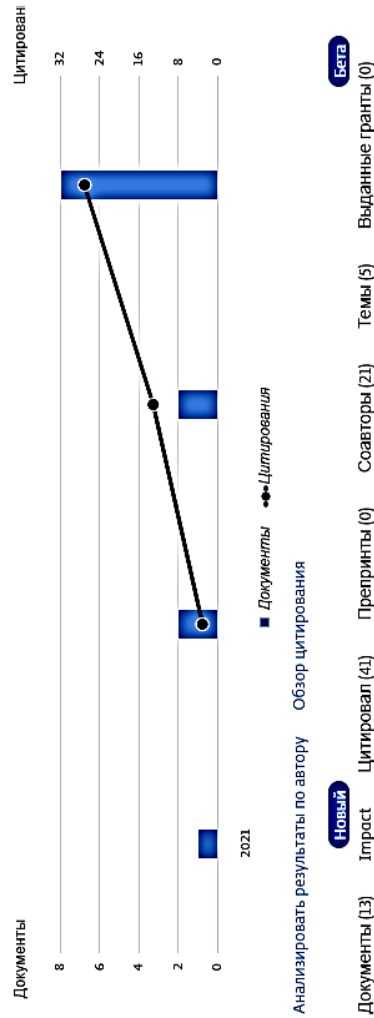
Al Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan • Scopus ID: 57292254700 • 0000-0003-1019-3352

Show all information

43 13 3
Citations by documents documents h-index

Настроить оповещение Сохранить в список Редактировать профиль Подробнее

Документ и тенденции цитирования



13 documents

ПРИЛОЖЕНИЕ В (О публикациях, входящих в БД Scopus)